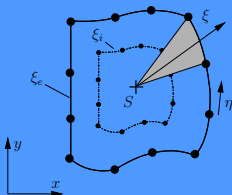




Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten mit besonderem Fokus auf der Ermittlung von Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben

Rolf Dieringer



$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_0 \xi^4 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi\xi}(\xi) + [2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T] \xi^3 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi) + [\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3] \xi^2 \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi) \\ & + [-2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T] \xi \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi) + [2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5] \mathbf{w}_h(\xi) = 0 \end{aligned}$$

Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten mit besonderem Fokus auf der Ermittlung von Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Rolf Dieringer

aus Ravensburg

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| Berichterstatter: | Prof. Dr.-Ing. W. Becker |
| Mitberichterstatter: | Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann |
| Tag der Einreichung: | 02.12.2014 |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 25.02.2015 |

Darmstadt 2014
D17

Dieringer, Rolf

Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten mit besonderem Fokus auf der Ermittlung von Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben

Forschungsberichte des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt
Band 36

Herausgeber der Reihe:

Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt

Verfasser:

© 2015 Rolf Dieringer
Haldenweg 21, 88212 Ravensburg

Verlag:

Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt
Franziska-Braun-Straße 7, 64287 Darmstadt

Druckerzeugung:

Lasertype GmbH, Darmstadt

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

ISBN 978-3-935868-36-5

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strukturmechanik der Technischen Universität Darmstadt entstanden.

Ich bedanke mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Becker für seine Unterstützung und Förderung, seine stete Diskussionsbereitschaft sowie die mir gewährten Freiheiten bei der wissenschaftlichen Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Bei meinen aktuellen und ehemaligen Kollegen der Fachgebiete Strukturmechanik und Festkörpermechanik bedanke ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre innerhalb und außerhalb der Kernzeit und die kollegiale Unterstützung bei der Bewältigung verschiedenster Aufgaben.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie, meiner Freundin und meinen Freunden für ihre Geduld und Unterstützung.

Darmstadt, im Februar 2015

Rolf Dieringer

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Nomenklatur | V |
| Kurzfassung | IX |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Motivation | 1 |
| 1.2 Stand der Forschung – Rand-Finite-Elemente-Methode | 4 |
| 1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit | 9 |
| 2 Theoretische Grundlagen | 11 |
| 2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie | 11 |
| 2.1.1 Spannungszustand | 11 |
| 2.1.2 Gleichgewichtsbedingungen | 13 |
| 2.1.3 Verzerrungen | 16 |
| 2.1.4 Elastizitätsgesetz | 19 |
| 2.2 Kirchhoffsche Plattentheorie | 20 |
| 2.2.1 Grundgleichungen | 20 |
| 2.2.2 Randbedingungen der Kirchhoffschen Plattentheorie | 23 |
| 2.3 Klassische Laminattheorie | 26 |
| 2.3.1 Elastizitätsgesetz einer unidirektional faserverstärkten Einzelschicht | 26 |
| 2.3.2 Laminataufbau | 29 |
| 2.3.3 Kinematik der klassischen Laminattheorie | 29 |
| 2.3.4 Konstitutives Verhalten des Laminats | 30 |
| 2.3.5 Gleichgewichtsbedingungen | 31 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4 | Lösung von DGL-Systemen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten | 33 |
| 2.4.1 | DGL-Systeme mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen | 33 |
| 2.4.2 | DGL-Systeme mit beliebigen Koeffizientenmatrizen | 34 |
| 3 | Neue Rand-Finite-Elemente-Formulierungen | 37 |
| 3.1 | Einleitende Überlegungen und Definitionen | 38 |
| 3.1.1 | Skalierung und Transformation der Geometrie | 38 |
| 3.1.2 | Finite-Elemente-Diskretisierung | 40 |
| 3.1.3 | Approximation der Verschiebungen | 41 |
| 3.1.4 | Formulierung von Differentialoperatoren | 42 |
| 3.2 | Das schubstarre Plattenelement in der RFEM | 44 |
| 3.2.1 | Variationsprinzip / Herleitung der Differentialgleichungen | 44 |
| 3.2.2 | Homogene Lösung der Differentialgleichungen der Platte | 47 |
| 3.2.3 | Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix | 50 |
| 3.2.4 | Verschiebungsrandbedingungen auf den Seitenflächen | 52 |
| 3.3 | Das Laminatenelement in der RFEM | 55 |
| 3.3.1 | Variationsprinzip / Herleitung der Differentialgleichungen | 55 |
| 3.3.2 | Homogene Lösung des DGL-Systems des Laminats | 59 |
| 3.3.3 | Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Laminats | 61 |
| 3.4 | Untersuchungen der Elementformulierungen | 64 |
| 3.4.1 | Die Trapezplatte unter Querkraft | 64 |
| 3.4.2 | Der $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund unter Biegebeanspruchung | 65 |
| 3.4.3 | Der $[0^\circ/90^\circ]$ -Kreuzverbund unter Normal- und Querkraft | 67 |
| 4 | Analyse von Singularitäten | 69 |
| 4.1 | Spannungssingularitäten in der linear elastischen Bruchmechanik | 69 |
| 4.2 | Stand der Forschung – Singularitätsordnungen | 72 |
| 4.3 | Singularitätsexponenten der isotropen Platte | 76 |
| 4.4 | Singularitätsexponenten der orthotropen Platte | 83 |
| 4.5 | Singularitätsexponenten des symmetrischen Kreuzverbunds | 91 |
| 4.5.1 | Singularitätsexponenten des Scheibenverhaltens | 91 |
| 4.5.2 | Singularitätsexponenten des Plattenverhaltens | 98 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.6 | Singularitätsexponenten des unsymmetrischen Kreuzverbunds | 103 |
| 4.7 | Singularitätsexponenten des unsymmetrischen Winkelverbunds | 112 |
| 4.7.1 | Einfluss von Randbedingungen | 115 |
| 5 | Zusammenfassung und Ausblick | 119 |
| | Literatur | 122 |

Nomenklatur

Abkürzungen

| | |
|-------|---------------------------------------|
| ESZ | Ebener Spannungszustand |
| EVZ | Ebener Verzerrungszustand |
| FEM | Finite-Elemente-Methode |
| PdvV | Prinzip der virtuellen Verrückungen |
| SBFEM | Scaled Boundary Finite Element Method |
| RFEM | Rand-Finite-Elemente-Methode |

Notation

| | |
|------------------------------------|---|
| $(..)_{,i}$ bzw. $(..)_{,\xi}$ | Erste partielle Ableitung nach Komponente i bzw. ξ |
| $(..)_{,ii}$ bzw. $(..)_{,\xi\xi}$ | Zweite partielle Ableitung nach Komponente i bzw. ξ |
| $(..)^T$ | Transponierte Matrix bzw. transponierter Tensor |
| $\text{Re}(..)$ | Realteil einer komplexen Zahl |
| $\text{Im}(..)$ | Imaginärteil einer komplexen Zahl |
| $ \dots $ | Determinante |
| ∇ | Nabla-Operator |

Lateinische Buchstaben

| | |
|--|--|
| A | Oberfläche eines Körpers |
| A_{ij} | Dehnsteifigkeiten |
| \mathbf{A} | Koeffizientenmatrix |
| B_{ij} | Kopplungssteifigkeiten |
| $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ | Verzerrungs-Verschiebungs-Operatormatrizen in Randkoordinaten |
| $\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ | Matrizen des Nabla-Operators in Randkoordinaten |
| $\mathbf{B}_5, \dots, \mathbf{B}_{10}$ | Verschiebungs-Verkrümmungs-Operatormatrizen in Randkoordinaten |
| \mathbf{C} | Elastizitätstensor |

| | |
|---|--|
| C_{ij} | Komponenten des Elastizitätstensors in Voigt-Notation |
| C_{ijkl} | Komponenten des Elastizitätstensors |
| c_k | Wichtungen der Deformationsmoden in der RFEM |
| dA | infinitesimales Flächenelement |
| D_{ij} | Biegesteifigkeiten |
| δW | virtuelle Arbeit |
| $d\mathbf{x}$ bzw. $d\mathbf{X}$ | Linielement in der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration |
| E | Elastizitätsmodul |
| \mathbf{E} | Einheitsmatrix |
| $\mathbf{E}_{A0}, \mathbf{E}_{A1}, \mathbf{E}_{A2}$ | Randsteifigkeitsmatrizen des Scheibenquadranten in der RFEM |
| $\mathbf{E}_{B0}, \dots, \mathbf{E}_{B5}$ | Randsteifigkeitsmatrizen des Kopplungsquadranten in der RFEM |
| $\mathbf{E}_{D0}, \dots, \mathbf{E}_{D5}$ | Randsteifigkeitsmatrizen des Plattenquadranten in der RFEM |
| \mathbf{F} | Schnittkraftvektor |
| \mathbf{f} | Vektor der Volumenkräfte |
| G | Schubmodul |
| h | Platten- bzw. Laminatdicke |
| \mathbf{H}_i | Hilfsmatrizen in der RFEM |
| H_{ij} | Verschiebungsgradient |
| \mathbf{J} | Jacobi-Matrix |
| J_i | Jordan-Zellen |
| K | Plattensteifigkeit |
| \mathcal{L} | Verzerrungs-Verschiebungs-Operator |
| M_x, M_y | Biegemomente |
| M_{xy} | Drillmomente |
| N_x, N_y, N_{xy} | Scheibenschnittkräfte |
| $\mathbf{N}_g(\tilde{\eta})$ | lineare Ansatzfunktionen zur Geometrieapproximation |
| $\mathbf{N}_w(\tilde{\eta})$ | Hermiteische Polynome zur Approximation der Verschiebung w |
| \mathbf{n} | Normalenvektor |
| $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{66}$ | reduzierte Steifigkeiten |
| Q_x, Q_y | Querkräfte in der Kirchhoffschen Plattentheorie |
| $\overline{Q}_x, \overline{Q}_y$ | Kirchhoffsche Ersatzquerkräfte |
| p | Flächenlast |
| S | Skalierungs- bzw. Ähnlichkeitszentrum |
| t | Zeit |
| \mathbf{t} | Spannungsvektor |
| \mathbf{T} | Transformationsmatrix |
| \mathbf{u} | Inplane-Verschiebungsvektor |

| | |
|-----------------|--|
| u, v, w | Verschiebungskomponenten |
| \mathbf{w} | diskreter Verschiebungsvektor in z -Richtung |
| x, y, z | kartesische Koordinaten |
| x_1, x_2, x_3 | Ortskoordinaten in der Momentankonfiguration |
| X_1, X_2, X_3 | Ortskoordinaten in der Referenzkonfiguration |

Griechische Buchstaben

| | |
|-----------------------|--|
| Δ | Laplace-Operator |
| ε_{ij} | infinitesimaler Verzerrungstensor |
| η | Randkoordinate in der RFEM |
| $\tilde{\eta}$ | lokale Randkoordinate in der RFEM |
| γ_{ij} | technische Gleitungen |
| Θ | Diagonalmatrix |
| λ | Eigenwert |
| $\mathbf{\lambda}$ | Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf der Diagonalen |
| ν | Querkontraktionszahl |
| σ | Normalspannungskomponente des Spannungsvektors |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Cauchyscher Spannungstensor |
| σ_{ij} | Cauchyscher Spannungstensor bzw. seine Komponente ij |
| $\boldsymbol{\psi}$ | Eigenvektor |
| τ | Schubspannungskomponente des Spannungsvektors |
| ξ | Skalierungskoordinate in der RFEM |
| ω_{ij} | infinitesimaler Rotationstensor |

Kurzfassung

Moderne Verbundwerkstoffe kommen heute in vielen Bereichen der Luft- und Raumfahrtstechnik, der Automobilindustrie und in den vielseitigsten Anwendungen des Maschinenbaus zum Einsatz. Sie eignen sich wegen ihrer hohen Steifigkeit, Festigkeit und ihres geringen spezifischen Gewichts ideal als Leichtbauwerkstoffe. In technischen Anwendungen kommen Verbundwerkstoffe meist als dünnwandige flächenformige Strukturen zum Einsatz, die aus mechanischer Sicht als Platten und Lamine modelliert werden. Verbundwerkstoffe sind stoffschlüssige Verbindungen unterschiedlicher Konstituenten. An den Verbindungsstellen können wegen unterschiedlicher Materialeigenschaften der Fügepartner singuläre Spannungsfelder auftreten. Diese entstehen aber auch an geometrischen Diskontinuitäten wie Rissen und Kerben. Obwohl Spannungssingularitäten aus der Elastizitätstheorie resultieren und in realen Strukturen nicht auftreten können, da mit Erreichen der Fließgrenze durch plastische Deformationen Spannungsspitzen abgebaut werden, ist ihre Analyse insbesondere in der unmittelbaren Umgebung von Risspitzen und Kerbgründen von zentraler Bedeutung für die Festigkeitsbewertung. Singuläre Felder werden unter anderem durch ihre Singularitätsordnung charakterisiert. Singularitätsordnungen können mit der in der Industrie weit verbreiteten Finite-Elemente-Methode nicht direkt ermittelt werden. Darum müssen neue Berechnungsverfahren entwickelt werden, die diesen Anforderungen gerecht werden. Ein neues, vielversprechendes Berechnungsverfahren ist die Rand-Finite-Elemente-Methode.

Die Rand-Finite-Elemente-Methode ist ein semi-analytisches Berechnungsverfahren, das die Vorteile der Finite-Elemente-Methode mit der Effizienz und Genauigkeit analytischer Berechnungsverfahren verbindet. Der größte Unterschied im Vergleich zur bekannteren Finite-Elemente-Methode besteht darin, dass nur der Rand eines Gebiets diskretisiert wird. Das zu untersuchende Gebiet wird durch eine Ähnlichkeitsabbildung seines Rands bezüglich eines Skalierungszentrums beschrieben. Die gesuchten Verschiebungen werden als Produkte aus bekannten Formfunktionen und unbekannten Funktionen einer Skalierungscoordinate approximiert. Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen lässt sich ein Differentialgleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Verschiebungsfunktionen herleiten, das analytisch über ein Eigenwertproblem gelöst werden kann. Die Eigenwerte und Eigenvektoren stellen unabhängige Deformationen der Struktur dar, deren Gewichtung zur Gesamtlösung von äußeren Randbedingungen abhängt. Mit den Verschiebungen entlang der diskretisierten Ränder wird die Steifigkeitsmatrix aufgebaut, womit nach Berücksichtigung der Randbedingungen das Randwertproblem vollständig beschrieben ist.

In dieser Arbeit werden Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten vorgestellt. Die neuen Elementformulierungen basieren auf der Kirchhoffschen Plattentheorie bzw. der klassischen Laminattheorie. Die neuen Elemente ermöglichen nicht nur die Lösung komplexer Randwertprobleme, sondern erlauben auch die effiziente Berechnung von Singularitätsordnungen ohne zusätzlichen Aufwand. Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden die zu einem besseren Verständnis benötigten mechanischen Grundlagen vorgestellt. Im Hauptteil werden die neuen Elementformulierungen ausführlich beschrieben, an Hand einfacher Beispiele untersucht und Referenzlösungen gegenübergestellt. Im letzten Teil werden Singularitätsexponenten an Rissen und Keilen in Platten und Laminaten ermittelt. Neben unterschiedlichen Laminatlayups und daraus resultierenden Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten wird vor allem der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen auf die Stärke der Singularitäten diskutiert. Mit den neuen Elementen können auch Supersingularitäten, die die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ -Rissspitzensingularität übersteigen, sowie logarithmische Singularitäten effizient und genau ermittelt werden.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

In vielen Bereichen des Automobilbaus und der Luft- und Raumfahrttechnik kommen heutzutage in hochbeanspruchten Strukturen moderne Verbundwerkstoffe zum Einsatz. Diese zeichnen sich besonders durch ihre hohe Festigkeit, ihre hohe Steifigkeit und ihre geringe Dichte aus. Sie eignen sich deshalb ideal als Leichtbauwerkstoffe. Verbundwerkstoffe bieten im Einsatz aber nicht nur Vorteile auf Grund ihres geringen Gewichts und ihrer hohen Steifigkeit sondern auch wegen ihrer Korrosionsbeständigkeit und der damit verbundenen Wartungsfreiheit. Wegen ihrer relativ freien Formgestaltung sind Faser-Kunststoff-Verbunde in der Fertigung bei kleinen Stückzahlen sogar oft auch wirtschaftlicher als herkömmliche metallische Werkstoffe. Die Wirtschaftlichkeit von Verbundwerkstoffen liegt aber vor allem an ihrem im Vergleich zu metallischen Werkstoffen geringen Gewicht und der damit verbundenen Energieeinsparung während ihrer Nutzung bzw. ihres Einsatzes. Verbundwerkstoffe kommen meist als dünnwandige, flächenförmige Strukturen zum Einsatz, um ihre hohe Steifigkeit und ihr geringes spezifisches Gewicht im Leichtbau optimal nutzen zu können. Aus mechanischer Sicht ist es wichtig, geeignete Modellierungs- und Berechnungsverfahren bereit zu stellen, um schon während der Entwicklung und Konstruktion sicherzustellen, dass Strukturen aus Verbundmaterialien ihren Anforderungen im Einsatz hinsichtlich Festigkeit und Lebensdauer gerecht werden. Innerhalb der linearen Elastizitätstheorie hat sich dabei die klassische Laminattheorie bewährt. Analytisch lassen sich mit ihrer Hilfe jedoch oft nur geometrisch einfache Strukturen untersuchen. Um auch Bauteile mit komplexen Geometrien zuverlässig beurteilen zu können, wird deshalb an den Ingenieur heutzutage auch die Forderung gestellt, geeignete Berechnungsverfahren zu entwickeln und zur Verfügung zu stellen. Die Finite-Elemente-Methode ist das heute in der Forschung aber auch in der Industrie bewährte und etablierte Verfahren zur Berechnung und Beurteilung komplexer Strukturen.

Bei vielen Problemstellungen innerhalb der linearen Elastizitätstheorie treten mathematische Singularitäten auf. Singularitäten treten z. B. an den Lastangriffsstellen konzentrier-

ter Einzelkräfte bzw. Einzelmomente aber auch an geometrischen oder materiellen Diskontinuitäten auf. Geometrische Diskontinuitäten sind Kerben und Risse, Materialübergänge oder Multimaterialfügungen stellen dagegen materielle Diskontinuitäten dar. Spannungssingularitäten resultieren aus der strengen elastizitätstheoretischen Idealisierung bzw. Modellierung. In der Realität werden lokale Spannungsspitzen jedoch bei Überschreiten der Fließ- oder Streckgrenze des eingesetzten Werkstoffs durch plastisches Fließen, also inelastische Deformationen, abgebaut. Sie sind deshalb im realen Bauteil als weit weniger kritisch anzusehen. Die genaue Kenntnis der Spannungs- und Verschiebungsfelder und somit auch der vorhandenen Singularitäten ist dennoch für die Auslegung und Bewertung von Bauteilen von grundlegendem Interesse. Vor allem bei spröden Materialien spielt die genaue Kenntnis der Spannungen und Verschiebungen bei der bruchmechanischen Bewertung eine tragende Rolle. Eine wichtige Kenngröße bei der bruchmechanischen Bewertung ist dabei die Singularitätsordnung, die die Nahfelder der Spannungen und Verschiebungen charakterisiert. Mit der Finite-Elemente-Methode kann diese wichtige Kenngröße nicht direkt ermittelt werden. Aus der Forderung, die Spannungsfelder auch bei vorhandenen Singularitäten mit der Finite-Elemente-Methode genau darzustellen, resultiert ein hoher Diskretisierungsaufwand und damit ein hoher Rechenaufwand. Der Einsatz der Rand-Finite-Elemente-Methode bietet hier Vorteile, da die Rand-Finite-Elemente-Methode im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode nicht nur die Lösung des vollständigen zu Grunde liegenden Randwertproblems erlaubt, sondern auch die genaue und effiziente Ermittlung von Singularitätsordnungen ohne zusätzlichen Aufwand ermöglicht.

Die Rand-Finite-Elemente-Methode ist ein semi-analytisches Berechnungsverfahren, dessen Ursprünge in der Bodenmechanik liegen. Im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode wird in der Rand-Finite-Elemente-Methode nur der Rand eines zu untersuchenden Gebiets diskretisiert. Die Geometrie der zu untersuchenden Struktur wird durch eine Ähnlichkeitstransformation ihres Rands bezüglich eines Skalierungszentrums, das vom gesamten Rand aus sichtbar sein muss, beschrieben. Die Verschiebungen werden als Produkt aus Formfunktionen und unbekannten Verschiebungsfunktionen approximiert. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten wird ein Differentialgleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Verschiebungsfunktionen hergeleitet, das über ein Eigenwertproblem gelöst werden kann. Zur Analyse von Spannungssingularitäten an Kerben und Rissen legt man das Ähnlichkeitszentrum in den Punkt, an dem singuläre Spannungen auftreten. Dies ist bei Rissen die Rissspitze bzw. bei Kerben der Kerbgrund. Aus den Eigenwerten des resultierenden Eigenwertproblems lassen sich die Singularitätsordnungen, die für die bruchmechanische Bewertung von grundlegender Bedeutung sind, direkt ablesen. Dies stellt den wesentlichen Vorteil der Rand-Finite-Elemente-Methode gegenüber der Finite-Elemente-Methode dar. Die Singularitätsordnungen können bei der Rand-Finite-Elemente-Methode direkt aus der Lösung des Eigenwertproblems ermittelt werden, ohne dass zu ihrer Bestimmung ein hoher Diskretisierungs- oder zusätzlicher Rechenaufwand nötig ist. Daneben lassen sich mit der Rand-Finite-Elemente-Methode auch Singularitäten, die durch einzeln auf dem Rand angreifende Kräfte oder Momente hervorgerufen werden, genau erfassen, wenn das Skalierungszentrum in den Lastangriffspunkt gelegt wird.

Viele Arbeiten zur Rand-Finite-Elemente-Methode, die in den folgenden Kapiteln detailliert beschrieben werden, beschäftigen sich mit der Analyse von Singularitäten an Rissen, Kerben und Materialübergängen. Diese Arbeiten basieren in der Regel auf Rand-Elemente-Formulierungen für Kontinuumsselemente. Elementformulierungen für Strukturen wie Platten und Lamine, die zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens flächenförmiger dünnwandiger Strukturen eingesetzt werden, fehlen bis zum jetzigen Zeitpunkt.

In dieser Arbeit werden deshalb Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminen vorgestellt. Die neuen Formulierungen für Platten basieren auf der Kirchhoffschen Plattentheorie, während für die Lamine auf die klassische Laminattheorie zurückgegriffen wird. An Hand von Beispielen werden die Erweiterungen überprüft. Die neuen Formulierungen erlauben die Analyse von Singularitäten an Rissen und Kerben in Platten und Laminen bei beliebigem anisotropen Materialverhalten. Insbesondere die Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode für Lamine erlauben es, Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten sowie ihren Einfluss auf die Stärke der Singularitäten an Rissen und Kerben in einem in der Literatur bisher unbekannten Maß zu diskutieren.

1.2 Stand der Forschung – Rand-Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Entwicklung der Rand-Finite-Elemente-Methode gegeben. Es werden die Anfänge der Methode, die in der Bodenmechanik liegen, beschrieben. Anschließend wird auf Erweiterungen und Entwicklungen innerhalb der Rand-Finite-Elemente-Methode eingegangen. Die Rand-Finite-Elemente-Methode, besser bekannt unter ihrer englischen Bezeichnung als "Scaled boundary finite element method" oder kurz "SBFEM" ist, wie bereits erwähnt, ein semi-analytisches Berechnungsverfahren, das auf der Finite-Elemente-Methode beruht. Die Anfänge der Rand-Finite-Elemente-Methode liegen in der Bodenmechanik, da sich mit ihrer Hilfe nicht nur endliche sondern auch unendlich ausgedehnte Gebiete analysieren lassen. Als Vorläufer der Rand-Finite-Elemente-Methode kann dabei ein von Dasgupta [26] als Cloning-Algorithmus bezeichnetes Verfahren angesehen werden. Um in der Bodenmechanik die Interaktionen zwischen einer Struktur und dem sie umgebenden Boden analysieren zu können, muss eine dynamische Steifigkeitsmatrix des unendlich ausgedehnten Bodens berechnet werden. Die grundlegende Annahme des Cloning-Algorithmus ist es, dass sich die mechanischen Eigenschaften des unendlich ausgedehnten Raums, die durch eine charakteristische Länge beschrieben werden, nicht wesentlich ändern, wenn zu diesem Raum ein endliches Gebiet mit bekannter dynamischer Steifigkeitsmatrix, das ebenfalls durch eine bestimmte Länge charakterisiert wird, hinzugefügt wird. Setzt man die verschiedenen Längen in Relation zueinander, erhält man ein Differentialgleichungssystem, aus dessen Lösung sich die gesuchte dynamische Steifigkeitsmatrix des unendlich ausgedehnten Halbraums bestimmen lässt. Wolf und Song [108] haben dieses als „Cloning-Algorithmus“ bekannte Konzept 1992 wieder aufgegriffen und unter der Bezeichnung "Consistent Infinitesimal Finite-Element-Cell Method" in den folgenden Jahren weiterentwickelt [91, 92, 109]. Dazu führen sie ein endliches mit finiten Elementen diskretisiertes Gebiet ein, dessen Steifigkeit und Masse bekannt sind. Mit dem „Cloning-Algorithmus“ berechnen sie anschließend die dynamische Steifigkeit eines Halbraums, von dem nur die Materialeigenschaften bekannt sind. Song und Wolf prägen später auch den Begriff "Scaled Boundary Finite Element Method", unter dem die Rand-Finite-Elemente-Methode heute in der Forschung bekannt ist [93]. Wesentliches Merkmal der Rand-Finite-Elemente-Methode ist, dass die Geometrie eines zu betrachtenden Gebiets durch die Skalierung seiner Randgeometrie bezüglich eines Ähnlichkeitszentrums abgebildet werden kann. Das Ähnlichkeitszentrum muss dabei vom gesamten Rand aus sichtbar sein. Jeder Punkt des Rands muss folglich durch eine gerade Verbindungslinie vom Ähnlichkeitszentrum aus erreicht werden, ohne dabei einen anderen Teil des Rands zu schneiden. Song und Wolf führen nun als erste dieses Ähnlichkeitszentrum ein. Der Gebietsrand wird mit finiten Elementen diskretisiert. Die Geometrie wird durch eine Ähnlichkeitsabbildung beschrieben. Dazu führen sie skalierte Randkoordinaten ein. Die Verschiebungen werden approximiert als Produkt von Formfunktionen und unbekannten Verschiebungsfunktionen der Skalierungscoordinate ξ . Song

und Wolf stellen in ihrer ersten Arbeit [93], in der sie die Vorgehensweise als “Scaled Boundary Finite Element Method” beschreiben, zunächst die partiellen Differentialgleichungen der Elastodynamik, die ihr Anfangsrandwertproblem beschreiben, in skalierten Randkoordinaten dar. Über die Methode der gewichteten Residuen erhalten sie schließlich ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen. Abschließend lässt sich die dynamische Steifigkeit entlang des Rands je nach Skalierung sowohl für ein endliches als auch für ein unendlich ausgedehntes Gebiet berechnen. In weiteren Arbeiten [95, 112] leiten Wolf und Song die Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen ebenfalls mit der Methode der gewichteten Residuen her. Eine Zusammenfassung der Arbeiten von Wolf und Song zur Modellierung unendlich ausgedehnter Gebiete findet sich in [110]. Im Zusammenhang mit der Entwicklung der Rand-Finite-Elemente-Methode muss neben Wolf und Song auch Deeks genannt werden. In einer frühen Arbeit [27] zur Rand-Finite-Elemente-Methode untersucht Deeks zusammen mit Wolf, wie sich ein elastisches Fundament mechanisch auf einen unendlich ausgedehnten Halbraum auswirkt. Das Gebiet wird dabei zweidimensional modelliert. Außerdem führt Deeks logarithmische Verschiebungsmoden ein. Motiviert ist dieses Vorgehen durch die bekannte analytische Einzelkraftlösung für eine halb unendlich ausgedehnte Scheibe, siehe [9]. Doherty und Deeks [39, 40] untersuchen mit der RFEM ein achsensymmetrisches Problem aus der Bodenmechanik, ein starres Fundament auf einem Untergrund, dessen Steifigkeit mit zunehmender Tiefe zunimmt.

Die Rand-Finite-Elemente-Methode ist aber nicht nur auf die Bodenmechanik beschränkt und auch nicht nur für die Analyse unendlich ausgedehnter Halbräume geeignet. In ihren Veröffentlichungen [96, 111] geben Wolf und Song einen Überblick über die RFEM, wobei sie vom nicht ebenen, longitudinalen Schubspannungszustand ausgehen. Der erste Teil der Veröffentlichung [96] ist der Herleitung der Gleichungssysteme gewidmet, der zweite [111] geht auf die Lösung der für die Rand-Finite-Elemente-Methode typischen Differentialgleichungen ein. In einer Arbeit von 1999 stellt Song die Behandlung von Volumenlasten in der Rand-Finite-Elemente-Methode vor [94]. Die Implementierung von Volumenlasten führt zu inhomogenen Differentialgleichungssystemen. Damit ist für die Lösung dieser Differentialgleichungen das Auffinden einer partikulären Lösung essentiell. Ebenfalls auf die Lösung der Differentialgleichungen geht Song in seiner Arbeit [84] ein, wobei er das resultierende DGL-System mit Hilfe von Matrix-Funktionen löst. Eine Herleitung der Rand-Finite-Elemente-Methode über das Prinzip der virtuellen Arbeiten, die sich weitestgehend an der heute üblichen Vorgehensweise der Elementformulierung in der Finite-Elemente-Methode orientiert, wird von Deeks [28] vorgestellt. Ebenfalls von Deeks stammt eine Veröffentlichung über den Spannungszustand an einem Loch in einer unendlich ausgedehnten Scheibe, wobei er ebenfalls zur Modellierung den nicht ebenen Schubspannungszustand zu Grunde legt [30]. Lindemann untersucht ebenfalls im Jahr 2002 Spannungskonzentrationen an freien Rändern in Laminaten, wobei er zur Modellierung eine räumliche Formulierung wählt. Die Besonderheit an dieser Formulierung ist, dass das Ähnlichkeitszentrum in diesem Fall im Unendlichen liegt [57, 58]. Deeks führt in seiner Arbeit [30] einen logarithmischen Deformationsmode ein. Als Begründung für dieses

Vorgehen führt er eine analytische Lösung des Randwertproblems, die als Referenzlösung dient, auf. In der Formulierung der Rand-Finite-Elemente-Methode für Platten und Lamine, wie sie in dieser Arbeit vorgestellt wird, treten ebenfalls mehrere logarithmische Deformationsmoden auf. Zu ihrer Generierung wird wie später beschrieben ein formalerer Zugang über die Transformation auf Jordansche Normalform gewählt, vgl. Kapitel 2.4.2. Besonders geeignet ist die Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Spannungssingularitäten, wie sie an geometrischen oder materiellen Diskontinuitäten auftreten können, vgl. Sinclair [82, 83]. Betrachtet man die Spannungsverteilung an einer Risspitze und führt dazu ein lokales Polarkoordinatensystem ein, dessen Ursprung in der Risspitze liegt, wird die asymptotische Lösung des Nahfelds durch Eigenwerte, die die Singularitätsordnung in radialer Richtung beschreiben, und Eigenfunktionen, die die Spannungen in Umfangsrichtung kennzeichnen, charakterisiert. Analysiert man Risse mit der Rand-Finite-Elemente-Methode ist es zweckmäßig, das Skalierungszentrum in die Risspitze zu legen. Die Eigenwerte geben dann die Singularitätsordnungen und die Eigenvektoren die Bruchmoden wieder. Ein wesentlicher Vorteil der RFEM im Vergleich zu analytischen Methoden wie der Eigenfunktion-Expansionsmethode liegt darin, dass durch die Diskretisierung des Rands des Problemgebiets die RFEM bei vielen Problemstellungen einsetzbar ist und somit nicht nur auf einfache Geometrien, die sich mittels Polarkoordinaten beschreiben lassen, beschränkt ist. Außerdem lassen sich ohne zusätzlichen Aufwand anisotrope Materialeigenschaften implementieren und analysieren. Die Berechnung von Singularitätsordnungen an Bi-, Tri- oder Multimaterialkonfigurationen ist ebenso möglich, da Übergangsbedingungen zwischen Gebieten unterschiedlicher Materialien automatisch erfüllt werden, ohne dass dabei ein zusätzlicher Aufwand bei der Lösung der Gleichungen entsteht. Im Vergleich zu numerischen Verfahren wie der Finite-Elemente-Methode besteht der Vorteil darin, dass man eine analytische Lösung in Skalierungsrichtung erhält, wobei die Eigenwerte die Singularitätsordnung beschreiben. Daraus folgt, dass man zur Analyse von Singularitätsordnungen ohne zusätzlichen Diskretisierungsaufwand im Bereich um die Risspitze auskommt. Die Rand-Finite-Elemente-Methode vereint somit die Genauigkeit und Effizienz einer analytischen Rechenmethode mit der universellen Anwendbarkeit und Vielseitigkeit eines numerischen Verfahrens.

Dies ist der Grund, weshalb sich viele Arbeiten im Bereich der RFEM mit bruchmechanischen Themenstellungen befassen. Die erste Veröffentlichung zur Thematik der Bestimmung von Spannungssingularitäten mit der Rand-Finite-Elemente-Methode geht wiederum auf Song zurück [97]. Song untersucht Risse in orthotropen Scheiben unter Schubbeanspruchung und Bimaterialscheiben unter Zug. Müller et al. verwenden die Rand-Finite-Elemente-Methode um vorherzusagen, in welche Richtungen Risse wachsen, die von Spannungskonzentrationen an Kerben und Bimaterialverbindungen ausgehen [69]. Mittelstedt und Becker untersuchen mit der RFEM Spannungssingularitäten an freien Rändern und Ecken von Laminaten [66, 68], wobei sie zur Modellierung eine 3d-Kontinuumsformulierung wählen und sich auf Lamine mit zwei Schichten beschränken. In weiteren Arbeiten untersuchen Mittelstedt und Becker Spannungssingularitäten an der Spitze einer Kerbe in der Form eines Konus in dreidimensionalen Strukturen sowie an

Rissen in elastischen Halbräumen [67]. Weitere Veröffentlichungen von Song befassen sich mit der Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren bei dynamischen Problemstellungen [85], der Evaluation logarithmischer Singularitäten [86] sowie der Analyse von Spannungskonzentrationen an Multimaterialverbindungen unter thermischer Beanspruchung [87]. Chidgze und Deeks untersuchen ebenfalls Spannungssingularitäten an Rissen und vergleichen ihre Lösungen mit der RFEM mit bekannten analytischen Lösungen an ausgewählten Beispielen [24].

Artel und Becker [7] führen kinematische Kopplungsgleichungen ein, um den Laminatrandeffekt mit Hilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode zu analysieren. Außerdem erweitert Artel die Rand-Finite-Elemente-Methode um piezoelektrisches Materialverhalten und untersucht Randeffekte in Laminaten aus piezoelektrischen Materialien [4–6]. Vu und Deeks untersuchen, inwieweit durch den Einsatz von Polynomen höherer Ordnung als Ansatzfunktionen das Konvergenzverhalten in der RFEM verbessert werden kann [102]. Yang untersucht das Risswachstum mit der RFEM, dazu führt er einen Remeshing-Algorithmus ein [115]. Zur Kontrolle des Risswachstums implementiert er unter anderem das Kriterium der maximalen Umfangsspannung. Später verwendet er zur Modellierung des Risswachstums ein Kohäsivzonen-Modell, wobei er die Rand-Finite-Elemente-Methode mit der Finite-Elemente-Methode koppelt [116, 117]. Song et al. definieren in ihrer Arbeit [88] verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren und untersuchen mit der RFEM Spannungssingularitäten an Rissen, die schräg zur Trennfläche zweier orthotroper Materialien in einer Scheibe verlaufen. In seiner Dissertation untersucht Wigger Spannungskonzentrationen an Verstärkungspflastern bei Laminaten mit der RFEM und vergleicht die Ergebnisse, die mit der RFEM erzielt wurden, mit Resultaten, die mit der Methode der komplexen Potentiale erzielt wurden [103]. Er untersucht nur symmetrische Lamine und beschränkt sich dabei auf das Scheibenverhalten.

Eine Reihe weiterer Arbeiten untersucht Spannungskonzentrationen im Dreidimensionalen z. B. für dynamische Probleme Song et al. [89, 90], bei Rissen in Laminaten Mayland [62, 63] und der Analyse von Rissinteraktionen im Dreidimensionalen siehe Goswami und Becker [45]. Li et al. verwenden die Schur-Zerlegung zur Ermittlung der Eigenwerte. Dieses Verfahren konvergiert besser, wenn Eigenwerte auftreten, deren algebraische Vielfachheit größer als ihre geometrische ist [56]. Eine neuere Veröffentlichung von Birk und Behnke untersucht dreidimensional Interaktionen zwischen Struktur und Boden [10]. Dazu erweitert Birk den Begriff des Ähnlichkeitszentrums, indem sie eine Ähnlichkeitsachse einführt. Dies führt aber zu Differentialgleichungen, die nicht analytisch gelöst werden können.

Bei den in der Literatur bekannten und hier vorgestellten Arbeiten handelt es sich ausschließlich um 2d- oder 3d-Kontinuumsformulierungen. Die Formulierung von Strukturelementen, die auf bestimmten kinematischen Annahmen beruhen, und zur Beschreibung dünnwandiger Strukturen, wie sie im Leichtbau eingesetzt werden, nötig sind, sind bisher unbekannt. Ziel dieser Arbeit ist deshalb die Entwicklung eines Strukturelements zur Beschreibung Schubstarrer Platten und Lamine. Ebenfalls mit der Beschreibung von Platten in der Rand-Finite-Elemente-Methode beschäftigen sich Man et al. [59, 60]. Sie wählen jedoch einen anderen Zugang zur Thematik. Sie gehen von einer 3d-Kontinuums-

formulierung aus und kondensieren dann daraus das Plattenverhalten, indem sie entsprechende Randbedingungen aufbringen [59, 60]. Dadurch erhalten sie über die Plattendicke eine analytische Lösung. Allerdings ist diese Formulierung für die Analyse von Spannungskonzentrationen an Kerben und Rissen nicht geeignet. In den folgenden Kapiteln wird die Herleitung eines Platten- sowie eines Laminelements für die Rand-Finite-Elemente-Methode auf Grundlage der Kirchhoffschen Plattentheorie bzw. der klassischen Laminattheorie vorgestellt.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit werden grundlegende Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten vorgestellt. Die Erweiterungen beruhen auf vollkommen neuen Elementformulierungen für Platten bzw. Lamine. Zur Modellierung von Platten findet die Kirchhoffsche Plattentheorie Verwendung, während für die Laminatformulierungen auf die klassische Laminattheorie zurückgegriffen wird. Die Elementformulierungen werden mittels eines am Fachgebiet Strukturmechanik der TU Darmstadt entwickelten Programms numerisch implementiert. An Beispielen werden die neuen Elementformulierungen hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens untersucht und bezüglich des Rechenaufwands beurteilt. Mit den neuen Rand-Finite-Elementen lassen sich die Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben in Platten und Laminaten effektiv und genau bestimmen. Dazu werden bei gerissenen bzw. gekerbten isotropen Platten die Ergebnisse für die Singularitätsordnungen mit aus der Literatur bekannten Werten verglichen. Weiter werden die Singularitätsordnungen an gerissenen und gekerbten Laminaten berechnet. Dabei wird insbesondere der Einfluss von Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten, die aus unterschiedlichen Laminat-Layups resultieren, auf die Stärke der Singularitätsordnungen diskutiert.

Im folgenden Kapitel werden die für ein besseres Verständnis dieser Arbeit benötigten wesentlichen theoretischen Grundlagen zusammengestellt. Es werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, angefangen vom Spannungszustand über die Gleichgewichtsbedingungen, den Verzerrungszustand und das Elastizitätsgesetz skizziert. Darauf folgt ein Abschnitt über die Kirchhoffsche Plattentheorie. Neben ihren Grundgleichungen und kinematischen Annahmen wird vor allem auf die Formulierung der Randbedingungen und somit der Kirchhoffschen Ersatzquerkräfte eingegangen, da ihre Formulierung in der Kirchhoffschen Plattentheorie nicht trivial ist. Neben der Kirchhoffschen Plattentheorie wird die klassische Laminattheorie dargestellt. Das Grundlagenkapitel endet mit einem Abschnitt über die Lösung linearer Differentialgleichungssysteme, da die Lösung dieser Differentialgleichungssysteme einen wesentlichen Bestandteil der Lösung der Rand-Finite-Elemente-Methode ausmacht.

In Kapitel 3 werden zunächst die eigenen neuen Elementformulierungen in der Rand-Finite-Elemente-Methode für Kirchhoffsche Platten sowie anschließend für Lamine vorgestellt. Dazu wird zunächst die Geometrie der Platte bzw. des Laminats durch eine Ähnlichkeitsabbildung ihres Rands bezüglich eines Skalierungszentrums beschrieben. Das Skalierungszentrum muss dabei innerhalb der zu untersuchenden Geometrie so gewählt werden, dass es vom gesamten Rand aus sichtbar ist. Um diese Ähnlichkeitsabbildung besser beschreiben zu können, werden skalierte Rand-Koordinaten eingeführt. Anschließend wird der äußere Rand der Platte bzw. des Laminats mit finiten Elementen diskretisiert. Die Verschiebungen werden approximiert als Produkte aus Formfunktionen und unbekannten Verschiebungsfunktionen. Zur Approximation der ebenen Verschiebungen der Laminatmittenebene wird ein isoparametrischer Ansatz gewählt, während für die Formfunktionen zur Beschreibung der Verschiebung in Richtung der Platten- bzw. Laminatdicke Hermite-

Polynome verwendet werden. Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen lässt sich sowohl für die Platte als auch das Laminat ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen herleiten, das analytisch gelöst werden kann. Für schubstarre Platten und Lamine handelt es sich dabei um ein Eulersches Differentialgleichungssystem 4. Ordnung. Über die Formulierung eines Eigenwertproblems lässt sich dieses Differentialgleichungssystem nun lösen. Die homogene Lösung dieses Differentialgleichungssystems wird von den Eigenwerten und ihren Eigenvektoren gebildet. Jeder Eigenwert und sein zugehöriger Eigenvektor stellen dabei einen unabhängigen Deformationsmode der Platte bzw. des Laminats dar, dessen Gewichtung zur Gesamtlösung von den äußeren Randbedingungen abhängt. Aus den Verschiebungen entlang der Ränder lässt sich die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aufbauen und nach Einarbeitung geometrischer Randbedingungen die Lösung für die gesamte Platte darstellen. Für das Laminat wird prinzipiell die gleiche Vorgehensweise gewählt. Allerdings erhält man ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 4. Ordnung, das das gekoppelte Scheiben-Platten-Verhalten des Laminats widerspiegelt und höhere Anforderungen bezüglich der Lösbarkeit stellt. Zum Schluß wird das Konvergenzverhalten der neuen Elementformulierungen an einfachen Beispielen untersucht und mit FE-Lösungen verglichen.

Mit der Rand-Finite-Elemente-Methode lassen sich besonders effizient und genau Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben ermitteln, wenn das Skalierungszentrum in die Risspitze bzw. den Kerbgrund gelegt wird. Dazu werden in Kapitel 4 ausgewählte Konfigurationen untersucht. In Kapitel 4 wird zunächst ein allgemeiner Überblick über Spannungssingularitäten in Platten gegeben. Darauf folgt eine Literaturrecherche über Arbeiten, die sich mit der Ermittlung von Spannungssingularitäten befassen. Anschließend werden zunächst für isotrope sowie darauffolgend für orthotrope Platten Singularitätsordnungen an Rissen und Kerben bestimmt und in Abhängigkeit vom Kerböffnungswinkel und den Randbedingungen auf den Kerbflanken dargestellt. Ebenso wird für die Laminatkonfigurationen verfahren. Dabei werden neben symmetrischen Laminaten vor allem unsymmetrische Laminatlayups wie einfache Kreuzverbunde und Winkelverbunde untersucht. Ziel ist es, neben dem Einfluss des Laminataufbaus auch die verschiedenen Kopplungseigenschaften und ihren Einfluss auf die Singularitätsexponenten richtig abzubilden. Neben dem Einfluss der unterschiedlichen Kopplungssteifigkeiten auf die Stärke der Spannungssingularitäten wird auch der Einfluss verschiedener Randbedingungen auf den Kerbflanken diskutiert. Insbesondere die Diskussion des Einflusses der Kopplungen von Scheiben- und Plattenverhalten auf die Singularitätsordnungen stellt eine wesentliche Neuerung und Qualität der Untersuchungen dar. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung. Außerdem wird ein kurzer Ausblick für weitere Forschungsthemen gegeben.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

In den folgenden Abschnitten werden grundlegende Begriffe und Formeln der linearen Elastizitätstheorie eingeführt, die zum Verständnis dieser Arbeit von Bedeutung sind. Zum tieferen Verständnis sei auf die Fachliteratur von Becker und Gross [9, 46] verwiesen, an deren Werken sich die folgenden Abschnitte orientieren. Die lineare Elastizitätstheorie stellt dabei die Werkzeuge zur Verfügung, um das mechanische Verhalten von Körpern und Strukturen zu beschreiben und rechtzeitig kritische Situationen aufzuzeigen. Unter einem Körper versteht man dabei einen räumlichen, flächenförmigen oder linienförmigen Bereich, der gleichmäßig mit Materie ausgefüllt ist. An Hand von Gleichgewichtsbedingungen, kinematischen Beziehungen und dem Elastizitätsgesetz, den grundlegenden Gesetzmäßigkeiten innerhalb der linearen Elastizitätstheorie, lassen sich nun Modelle erstellen, um die Beanspruchungen und Deformationen eines Körpers unter gegebenen äußeren Belastungen zu erfassen. Die Beanspruchung eines Körpers wird dabei lokal durch den Spannungszustand beschrieben und die Deformation lokal durch den Verzerrungszustand. Verknüpft sind beide über das Elastizitätsgesetz, im Fall der linearen Elastizitätstheorie durch das Hookesche Gesetz. Dabei ist ein elastisches Materialverhalten dadurch gekennzeichnet, dass sich die aus einer Belastung resultierenden Deformationen bei einer vollständigen Entlastung unmittelbar zurückbilden.

2.1.1 Spannungszustand

Wirken auf einen Körper äußere Kräfte, z. B. Volumenkräfte \mathbf{f} oder Oberflächenkräfte \mathbf{t} , wie in Abb. 2.1 a) dargestellt, rufen diese im Inneren des Körpers Beanspruchungen hervor. Dabei stellen Kräfte mathematisch gesehen Vektoren dar. Legt man diese inneren Kräfte durch Schneiden des Körpers gedanklich frei, so wirkt auf jedes Flächenelement ΔA die Schnittkraft $\Delta \mathbf{F}$, der nach dem dritten Newtonschen Axiom auf der gegenüberliegenden Schnittfläche eine gleich große, entgegengesetzt wirkende Schnittkraft gegenübersteht. Der

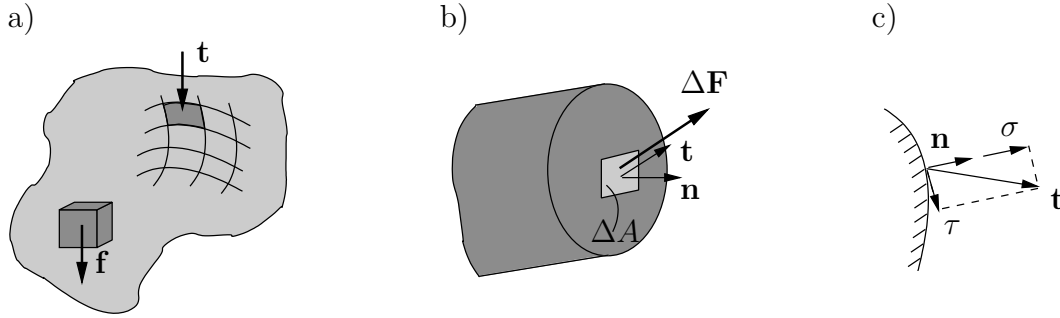


Abb. 2.1: Volumenkräfte, Flächenkräfte sowie Spannungsvektor \mathbf{t}

Spannungsvektor ist nun durch den Grenzübergang

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (2.1.1)$$

definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert. Außerdem wird angenommen, dass auf der Schnittfläche nur Kräfte und keine Momente übertragen werden. Der Spannungsvektor \mathbf{t} hängt von der Orientierung der Schnittfläche \mathbf{n} ab, vgl. Abb. 2.1 b). Üblicherweise zerlegt man den Spannungsvektor in einen Teil senkrecht zur Schnittfläche, die sogenannte Normalspannung σ , und eine Komponente tangential zur Schnittfläche, die als Schubspannung τ bezeichnet wird:

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \sigma^2}. \quad (2.1.2)$$

Anschaulich dargestellt ist der Zusammenhang in Abb. 2.1 c). Der Spannungszustand in einem Punkt ist aber erst eindeutig durch Spannungsvektoren in drei senkrecht aufeinander stehenden Schnitten bestimmt. Zur Darstellung des Spannungszustands geht man zweckmäßigerweise von einem Elementarquader im kartesischen Koordinatensystem aus. Es gilt die übliche Vorzeichenkonvention, d. h. Spannungen sind positiv bzw. negativ, wenn sie am positiven bzw. negativen Schnittufer in positive bzw. negative Koordinatenrichtung zeigen. Bei einem positiven Schnittufer zeigt der Normalenvektor \mathbf{n} in positive Koordinatenrichtung, bei einem negativen in negative. Für den Spannungsvektor \mathbf{t}_1 gilt mit den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{t}_1 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3. \quad (2.1.3)$$

Spannungskomponenten mit gleichen Indizes kennzeichnen folglich Normalspannungen, während ungleiche Indizes auf Schubspannungen hindeuten. Fasst man die Spannungsvektoren dreier unabhängiger Schnitttrichtungen zusammen, gelangt man zum Spannungstensor σ_{ij} , durch den der Spannungszustand in einem Punkt eindeutig gekennzeichnet ist.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Der Spannungstensor σ_{ij} , der nach *A. L. Cauchy* auch Cauchyscher Spannungstensor genannt wird, ist ein Tensor 2. Stufe. Auf Grund des lokalen Momentengleichgewichts ist der Cauchysche Spannungstensor symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{oder} \quad \text{symbolisch} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.1.5)$$

Ist der Spannungstensor bekannt, lässt sich der Spannungsvektor für jede beliebige Schnitt- richtung bestimmen. Dazu betrachtet man das Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Tetraeder. Wenn die Orientierung eines Flächenelements dA durch einen Einheitsvektor \mathbf{n} gegeben ist, so folgt durch Projektion von dA auf die Koordinatenebenen für die übrigen Tetraederflächen:

$$dA_1 = dA n_1, \quad dA_2 = dA n_2, \quad dA_3 = dA n_3 \quad \text{oder allgemein} \quad dA_i = dA n_i. \quad (2.1.6)$$

Stellt man nun das Kräftegleichgewicht in x_1 -, x_2 - und x_3 -Richtung auf

$$\begin{aligned} t_1 dA &= \sigma_{11} dA_1 + \sigma_{21} dA_2 + \sigma_{31} dA_3, \\ t_2 dA &= \sigma_{12} dA_1 + \sigma_{22} dA_2 + \sigma_{32} dA_3, \\ t_3 dA &= \sigma_{13} dA_1 + \sigma_{23} dA_2 + \sigma_{33} dA_3 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

und setzt die Beziehungen aus Gl. 2.1.6 ein, erhält man

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3, \\ t_2 &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3, \\ t_3 &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Diese Beziehungen lassen sich unter Verwendung der Indexschreibweise und der Einstein- schen Summationskonvention kurz als $t_i = \sigma_{ji} n_j$ schreiben. Auf Grund der Symmetrie des Spannungstensors gilt aber ebenso $t_i = \sigma_{ij} n_j$. Die Gleichungen werden als *Cauchysches Theorem* bezeichnet.

2.1.2 Gleichgewichtsbedingungen

Bisher wurde der Spannungszustand nur in einem Punkt eines Körpers betrachtet. Im rea- len Körper sind die Komponenten des Spannungstensors jedoch nicht unabhängig vonein- ander, sondern müssen lokalen Gleichgewichtsbedingungen genügen. Die Gleichgewichts- bedingungen des räumlichen Spannungszustands lassen sich über die Betrachtung des Kräfte- und Momentengleichgewichts am infinitesimalen Volumenelement ableiten. Nun

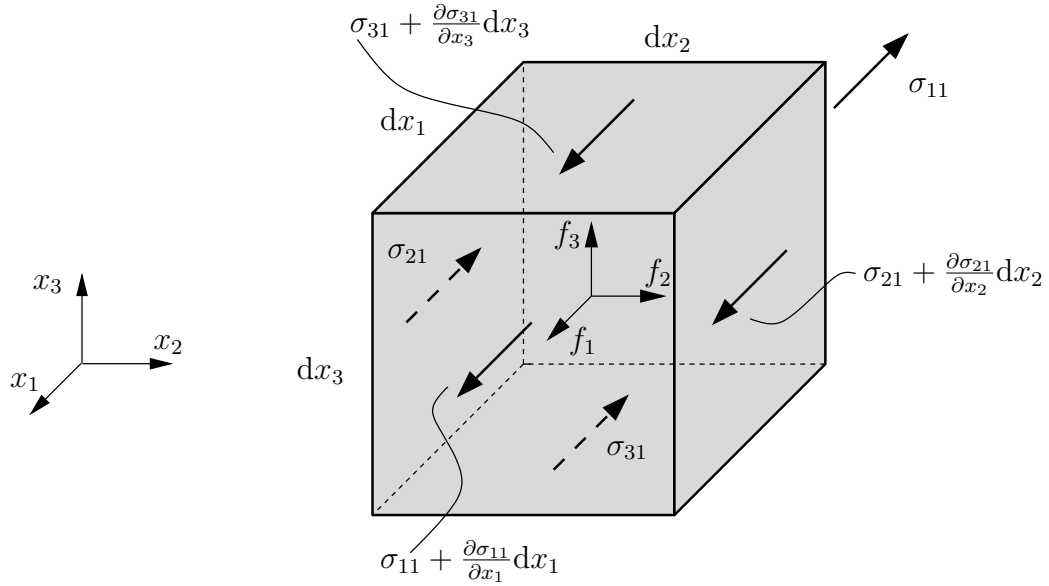


Abb. 2.2: Spannungskomponenten in x_1 -Richtung am infinitesimalen Volumenelement

wird zunächst ein infinitesimales Volumenelement mit den Kantenlängen dx_1, dx_2 bzw. dx_3 , wie in Abb. 2.2 dargestellt, betrachtet. Das Volumenelement wird durch die Volumenkraft \mathbf{f} mit den Komponenten f_1, f_2 und f_3 belastet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns auf die Darstellung der Komponenten des Spannungstensors in x_1 -Richtung. Die Änderung einer Spannung von einer Deckfläche zur gegenüberliegenden wird durch eine Taylor-Reihenentwicklung, bei der nur das 1. Glied berücksichtigt wird, beschrieben. Stellt man nun das Kräftegleichgewicht in x_1 -Richtung auf, erhält man:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0. \quad (2.1.9)$$

Für die Gleichgewichtsbedingungen in die anderen Richtungen folgt analog:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

In Inderschreibweise lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen kompakt darstellen als:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0. \quad (2.1.11)$$

Aus den Momentengleichgewichten um die einzelnen Achsen folgt die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). Zur Bestimmung der daraus folgenden sechs unabhängigen Komponenten des Spannungstensors stehen somit nur drei partielle Differentialgleichungen zur Verfügung. Somit ist das Problem statisch unbestimmt, da die Spannungen nicht alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können.

Alternativ lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen auch über die Formulierung des Kräftegleichgewichts für ein beliebiges aus dem Körper geschnittenes Volumen V mit der Oberfläche A bestimmen. Damit der Körper im Gleichgewicht ist, muss die Summe der äußeren Kräfte verschwinden:

$$\int_A t_i dA + \int_V f_i dV = 0 . \quad (2.1.12)$$

Mit dem Cauchyschen Theorem $t_i = \sigma_{ji}n_j$ und dem Gaußschen Integralsatz $\int_A \sigma_{ji}n_j dA = \int_V \partial\sigma_{ji}/\partial x_j dV$ erhält man schließlich, wenn man die Volumenintegrale zusammenfasst:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i) dV = 0 . \quad (2.1.13)$$

Diese Gleichung kann für beliebige Volumen nur erfüllt sein, wenn der Integrand verschwindet, woraus die Gleichgewichtsbedingungen aus Gl. (2.1.11) resultieren.

2.1.3 Verzerrungen

Die Kinematik eines deformierbaren Körpers wird durch die Verschiebungen einzelner Punkte und durch die lokalen Verzerrungen beschrieben. Dazu betrachtet man zunächst einen beliebigen materiellen Punkt P eines undeformierten Körpers, der durch seinen Ortsvektor \mathbf{X} in einem räumlich festen kartesischen Koordinatensystem beschrieben wird, wie in Abb. 2.3 dargestellt. Der undeformierte Ausgangszustand des Körpers wird dabei auch als Referenzkonfiguration beschrieben. Bei einer Deformation des Körpers erfährt jeder Partikel P eine Verschiebung und geht in einen deformierten Zustand P' über, der als Momentankonfiguration bezeichnet wird. Dieser wird durch den Ortsvektor \mathbf{x} und die Ortskoordinaten x_i beschrieben. Für die Verschiebung von dem Punkt P nach P' gilt $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. Die Verschiebung eines Partikels aber auch jede andere Zustandsgröße lassen sich dabei auf zwei unterschiedliche Weisen beschreiben. In der Lagrangeschen Beschreibung, die in der Festkörpermechanik üblich ist, wird die Verschiebung als Funktion der materiellen Koordinaten X_i und der Zeit t aufgefasst. Es wird folglich das Schicksal eines Partikels verfolgt. Sein Ort und seine Verschiebung werden beschrieben durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t). \quad (2.1.14)$$

In der Eulerschen Beschreibung wird dagegen der „Zustand“ an einem festen Ort betrachtet. Im deformierten Zustand befindet sich an diesem Ort ein bestimmtes Partikel, das eine bestimmte Verschiebung erfahren hat.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.1.15)$$

Die Eulersche Beschreibungsweise eignet sich somit vor allem für die Fluidmechanik. Um den Deformationszustand zu charakterisieren, benötigt man ein geeignetes Deformationsmaß. Dazu betrachtet man ein Linienelement, das im undeformierten Ausgangszustand durch den Vektor $d\mathbf{X}$ beschrieben wird. Bei Deformation geht das Element durch Streckung und Drehung in den Zustand $d\mathbf{x}$ über. Die Änderung $d\mathbf{x} - d\mathbf{X}$ ist durch die Ver-

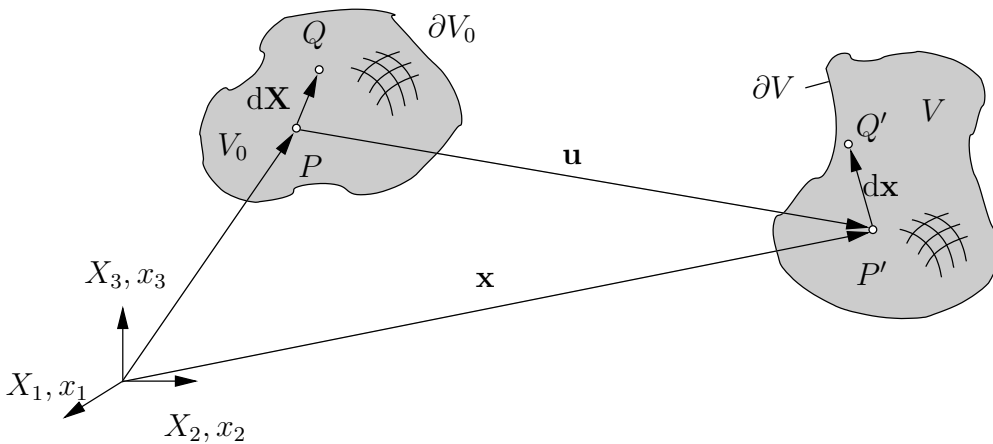


Abb. 2.3: Deformation eines Körpers

schiebungsdifferenz du der Punkte P und Q gegeben.

$$d\mathbf{x} - d\mathbf{X} = d\mathbf{u}. \quad (2.1.16)$$

Die Verschiebungsdifferenz lässt sich in der Lagrangeschen Beschreibung auch als vollständiges Differential

$$\begin{aligned} du_i &= \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial u_i}{\partial X_3} dX_3 \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = H_{ij} dX_j \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

darstellen. Dabei bezeichnet man H_{ij} als Verschiebungsgradienten. Bezieht man die Verschiebungsänderung du_i auf die Ausgangslänge $dS = |d\mathbf{X}|$, erhält man mit $n_j = dX_j/dS$ schließlich

$$\frac{du_i}{dS} = H_{ij} n_j. \quad (2.1.18)$$

Der Verschiebungsgradient beschreibt somit die auf die Ausgangslänge bezogene Relativverschiebung und damit die Streckung sowie die Drehung eines Linienelements bei der Deformation.

Infinitesimaler Verzerrungstensor

In der linearen Theorie betrachtet man zunächst den Verschiebungsgradienten aus dem vorherigen Abschnitt, wobei man die Verschiebungen als Funktion der materiellen Koordinaten darstellt $u_i = u_i(X_j)$. Wählt man nun eine implizite Darstellung für die Verschiebungen $u_i = u_i(x_k[X_j])$ lässt sich der Verschiebungsgradient folgendermaßen umformen:

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.1.19)$$

Im Fall eines hinreichend kleinen Verschiebungsgradienten lässt sich der zweite Term in der Klammer von Gl. (2.1.19) vernachlässigen. Damit besteht kein Unterschied mehr zwischen der Lagrangeschen und der Eulerschen Beschreibung. Der Verschiebungsgradient lässt sich anschließend in einen symmetrischen und einen asymmetrischen Anteil zerlegen.

$$H_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})}_{\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})}_{\omega_{ij}} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (2.1.20)$$

Der asymmetrische Anteil ω_{ij} beschreibt eine infinitesimale Drehung des Elements. Drehungen verursachen keine Verzerrungen und somit auch keine Spannungen im Element. Sie gehen daher nicht in das Elastizitätsgesetz ein und brauchen nicht weiter berücksichtigt werden. Der symmetrische Anteil ε_{ij} wird dagegen als infinitesimaler Verzerrungstensor

bezeichnet. Seine Darstellung in Matrizenform lautet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.1.21)$$

Die Diagonalelemente des Verzerrungstensors werden als Dehnungen bezeichnet. Sie beschreiben Längenänderungen:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (2.1.22)$$

In kartesischen Koordinaten ist auch die Schreibweise $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ für die Dehnungen gebräuchlich. Die übrigen Elemente des Verzerrungstensors beschreiben dagegen Winkeländerungen. Sie werden als Gleitungen bezeichnet:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (2.1.23)$$

Die Größen γ_{xy}, γ_{yz} und γ_{xz} werden als technische Gleitungen bezeichnet. Diese Schubverformungen beschreiben ebenfalls Winkeländerungen. Der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist wie der Spannungstensor ein Tensor zweiter Stufe. Alle Eigenschaften des Spannungstensors lassen sich folglich auf den Verzerrungstensor übertragen.

Kompatibilitätsbedingungen

Aus den drei Verschiebungen u_i lassen sich durch Differenzieren die sechs Komponenten des Verzerrungstensors berechnen. Sind andererseits die sechs Verzerrungen bekannt, stehen folglich sechs Gleichungen zur Bestimmung der drei Verschiebungen zur Verfügung. Die Verzerrungen können somit nicht unabhängig voneinander sein, sondern müssen bestimmte Kompatibilitätsbedingungen oder Verträglichkeitsbeziehungen erfüllen:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0. \quad (2.1.24)$$

Mechanisch bedeutet dies, dass nach der Deformation der stetige Zusammenhang des Körpers bestehen bleiben muss. Es dürfen folglich keine Lücken oder Überlappungen auftreten. Im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) verschwinden die Verzerrungskomponenten $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ und ε_{33} sowie die Ableitungen in x_3 -Richtung. Die Verträglichkeitsbeziehungen vereinfachen sich dann zu:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0. \quad (2.1.25)$$

2.1.4 Elastizitätsgesetz

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, alleine aus den Gleichgewichtsbedingungen und den kinematischen Beziehungen die Spannungen und die Dehnungen ohne Kenntnis des Elastizitätsgesetzes zu bestimmen. Das Elastizitätsgesetz beschreibt das eigentliche Materialverhalten, es verknüpft die Spannungen und Verzerrungen miteinander. Das Materialverhalten kann dabei nur experimentell ermittelt werden. Verhält sich das Material in allen Punkten gleich, bezeichnet man es als homogen, andernfalls als inhomogen. Von isotropem Material spricht man, wenn die Materialeigenschaften richtungsunabhängig sind. Liegen Vorzugsrichtungen oder sonstige richtungsabhängige Eigenschaften vor, bezeichnet man das Material ganz allgemein als anisotrop. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir uns auf linear elastisches Materialverhalten beschränken. Der Spannungstensor und der Verzerrungstensor sind dann über den Elastizitätstensor \mathbf{C} miteinander verknüpft.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \text{symbolisch} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.1.26)$$

Der Elastizitätstensor C_{ijkl} ist ein Tensor vierter Stufe, seine $3^4 = 81$ Komponenten sind jedoch nicht alle unabhängig voneinander. Im allgemeinen Fall der Anisotropie reduziert er sich auf 21 Komponenten. Viele Materialien verhalten sich isotrop. In diesem Fall lässt sich das Materialverhalten durch zwei unabhängige Konstanten λ und μ , die sogenannten *Laméschen Konstanten*, beschreiben:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.1.27)$$

In der Technik ist die Formulierung unter Verwendung des E-Moduls E und der Querkontraktionszahl ν gebräuchlicher. Unter Verwendung der Ingenieurkonstanten lautet dann das Elastizitätsgesetz im isotropen Fall:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}. \quad (2.1.28)$$

Dabei besteht zwischen dem E-Modul E und der Querkontraktionszahl ν auf der einen Seite und den *Laméschen Konstanten* andererseits folgender Zusammenhang:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.1.29)$$

2.2 Kirchhoffsche Plattentheorie

Die Formulierungen zur Rand-Finite-Elemente-Methode, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, basieren auf der Kirchhoffschen Plattentheorie, die deshalb in diesem Kapitel kurz vorgestellt wird. Das Kapitel zur Kirchhoffschen Plattentheorie gliedert sich dabei in zwei Abschnitte. Zuerst werden die Grundgleichungen in kartesischen Koordinaten dargestellt. Diese basieren auf den kinematischen Annahmen, dem Elastizitätsgesetz sowie Gleichgewichtsbetrachtungen am infinitesimalen Plattenelement. Im zweiten Abschnitt des Kapitels werden die Randbedingungen ausführlicher diskutiert, da ihre Formulierung im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie nicht trivial ist.

2.2.1 Grundgleichungen

Bei einer Platte handelt es sich um ein ebenes Flächentragwerk, bei dem alle äußeren Kräfte senkrecht zur Plattenmittelebene angreifen und eine Krümmung der ebenen Plattenmittelfläche hervorrufen. Außerdem ist bei einer Platte die Dicke h klein gegenüber ihren übrigen Abmessungen. Um die Platte mittels eines kartesischen Koordinatensystems zu beschreiben, wählt man das Koordinatensystem so, dass die x - und y -Koordinaten die Plattenmittelebene aufspannen und die z -Koordinate in Richtung der Plattennormalen zeigt, wie in Abb. 2.4 dargestellt. Die hier zu Grunde liegende Plattentheorie beruht auf einer Arbeit von Gustav R. Kirchhoff [51] aus dem Jahr 1850. Ihm gelang zum ersten Mal die exakte Formulierung

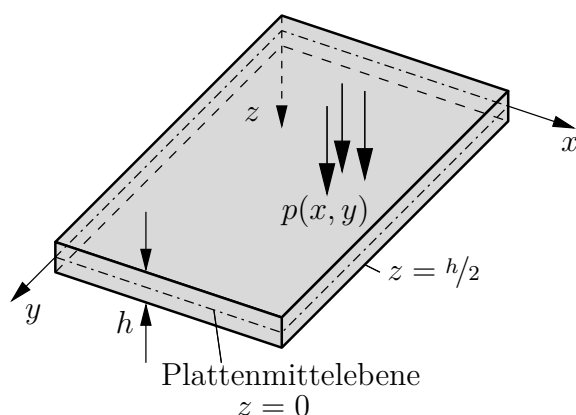


Abb. 2.4: Platte

des Randwertproblems inklusive der korrekten Formulierung der Randbedingungen. Deshalb wurde die Plattentheorie schließlich auch nach ihm benannt. Kirchhoff ging dabei von zwei grundlegenden kinematischen Annahmen aus:

1. Die Verschiebung w eines Punkts im Abstand z von der Plattenmittelebene ist unabhängig von z :

$$w = w(x, y).$$

Dies bedeutet, dass alle Punkte auf einer Normalen zur Plattenmittelebene die gleiche Verschiebung w erfahren. Die Plattendicke h ändert sich somit bei einer Biegedeformation nicht.

2. Normalen zur Mittelfläche der Platte bleiben auch nach der Deformation gerade und senkrecht zur deformierten Plattenmittelfläche. Dies stellt eine Verallgemeinerung

der Bernoulli-Hypothese der Balkentheorie auf Platten dar. In der Plattenmittelebene treten selbst keine Verzerrungen auf, sie wird deshalb auch als “neutrale Ebene” bezeichnet. Damit lassen sich die Verschiebungen wie folgt darstellen:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.2.1)$$

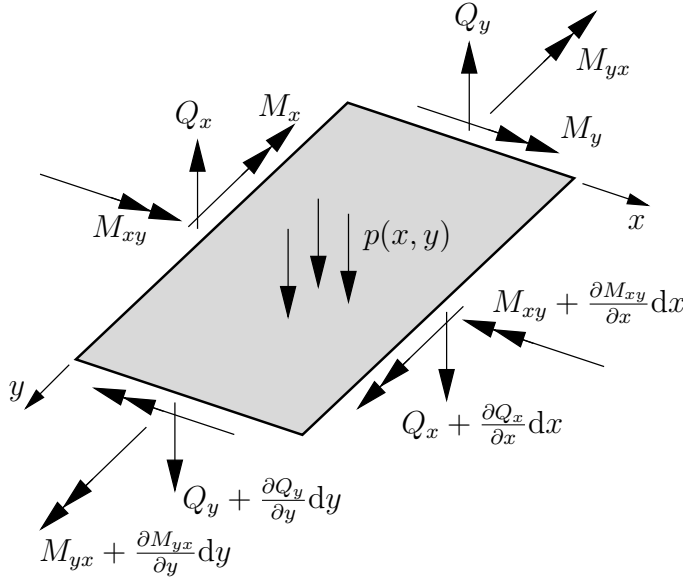
Mit den getroffenen kinematischen Annahmen lassen sich die Verzerrungen als Funktion der Verschiebung w darstellen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2.2)$$

Da alle Punkte einer Normalen die gleiche Verschiebung erfahren, folgt aus der ersten kinematischen Annahme $\varepsilon_z = 0$. Da die Normale zur Mittelfläche nach der Deformation weiter senkrecht zur deformierten Plattenmittelfläche steht, treten keine Schubdeformationen in Querrichtung auf: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Man spricht deshalb im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie auch von einer schubstarrten Platte. Desweiteren wird angenommen, dass die Normalspannung σ_z gegenüber den in der Platte auftretenden Biegespannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} vernachlässigt werden darf. Damit gelten bei Annahme eines linear elastischen, isotropen Werkstoffverhaltens die folgenden konstitutiven Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z, \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = -\frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Die Spannungen hängen somit linear von der Dickenkoordinate z ab. Die gleichzeitige Annahme von $\sigma_z = 0$ und $\varepsilon_z = 0$ stellt im Rahmen der Elastizitätstheorie einen Widerspruch dar, da aus dem ebenen Spannungszustand $\varepsilon_z = -\nu (\sigma_x + \sigma_y)$ folgt. Ein weiterer Widerspruch entsteht dadurch, dass einerseits Schubdeformationen γ_{xz} und γ_{yz} ausgeschlossen werden, andererseits aber Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} durchaus auftreten, für deren Formulierung es dann kein Elastizitätsgesetz gibt. Allerdings sind die Fehler, die durch diese widersprüchlichen Vereinfachungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie gemacht werden, so klein, dass die Kirchhoffsche Plattentheorie insgesamt trotzdem sehr gute Ergebnisse liefert und bis heute zur Auslegung und Berechnung von dünnen Flächentragwerken zum Einsatz kommt. Im weiteren Verlauf der Formulierung der Grundgleichungen ist es üblich und vorteilhaft, Schnittgrößen, wie in Abb. 2.5 dargestellt, einzuführen. Die Schnittgrößen sind auf die Breite des Schnitts bezogen, die Momente besitzen demnach die Dimension eines Moments pro Länge, also die Dimension einer Kraft. Die Querkräfte



Querkräfte :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz,$$

Biegemomente :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz,$$

Drillmomente :

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (2.2.4)$$

Abb. 2.5: Plattenelement mit Schnittgrößen und äußerer Flächenlast p

dagegen haben die Dimension einer Kraft pro Länge. Führt man die Plattensteifigkeit

$$K = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.2.5)$$

ein, kann man das Elastizitätsgesetz für die Plattenmomente in kompakter Form angeben:

$$M_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -(1 - \nu) K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2.6)$$

Die Querkräfte ermittelt man aus den Gleichgewichtsbedingungen. Dazu betrachtet man ein infinitesimales Plattenelement mit den Seitenlängen dx und dy . Auf das Plattenelement wirkt als äußere Belastung die Flächenlast p . An den positiven Schnittufern werden die Zuwächse der Schnittgrößen über das Plattenelement jeweils durch das erste Glied ihrer Taylor-Entwicklung berücksichtigt. Stellt man das Kräftegleichgewicht in z -Richtung auf, erhält man:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.2.7)$$

Die Momentengleichgewichte um die x -Achse und die y -Achse folgen bei Vernachlässigung

von Termen höherer Ordnung zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen der Momente die Querkräfte über die Verschiebungen ausdrücken:

$$\begin{aligned}Q_x &= -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \\ Q_y &= -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w).\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Setzt man diese Beziehungen in das Kräftegleichgewicht ein, erhält man die Kirchhoffsche Plattengleichung:

$$K (\Delta \Delta w) - p = 0.\tag{2.2.10}$$

Die Kirchhoffsche Plattengleichung ist eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Da die Formulierung von Randbedingungen im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie nicht trivial ist, wird die Kirchhoffsche Plattengleichung über das Prinzip der virtuellen Verrückungen abgeleitet und die Randbedingungen im Folgenden diskutiert.

2.2.2 Randbedingungen der Kirchhoffschen Plattentheorie

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gilt $\delta W = \delta U$. Dabei ist δW die bei einer virtuellen Verrückung um δw von der Oberflächenlast p geleistete Arbeit

$$\delta W = \iint p \delta w \, dx \, dy.\tag{2.2.11}$$

Die bei der virtuellen Verrückung gespeicherte innere Energie δU folgt bei der Kirchhoffschen Platte zu

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) \, dx \, dy \, dz.\tag{2.2.12}$$

Führt man die Integration über z aus und substituiert das Elastizitätsgesetz nach Gl. (2.2.3), lässt sich die virtuelle innere Energie folgendermaßen darstellen.

$$\delta U = K \iint ((w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,xx} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,yy} + 2(1 - \nu) w_{,xy} \delta w_{,xy}) \, dx \, dy.\tag{2.2.13}$$

Integriert man nun die einzelnen Terme zweifach partiell und stellt das Ergebnis in der Form $\delta U - \delta W = 0$ dar, erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \iint (K \Delta \Delta w - p) \delta w \, dx \, dy - K \int \left[(w_{,xxx} + \nu w_{,xyy} + 2(1-\nu) w_{,xyy}) \delta w \right]_{x=\text{konst.}} dy \\ & + K \int \left[(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,x} \right]_{x=\text{konst.}} dy \\ & - K \int \left[(w_{,yyy} + \nu w_{,xxy} + 2(1-\nu) w_{,xxy}) \delta w \right]_{y=\text{konst.}} dx \\ & + K \int \left[(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,y} \right]_{y=\text{konst.}} dx + 2K \left[(1-\nu) w_{,xy} \right]_{\text{Ecke}} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Damit Gleichgewicht herrscht, müssen die Summanden für jede beliebige virtuelle Verückung δw einzeln verschwinden. Aus dem 1. Summanden folgt die Kirchhoffsche Plattengleichung, vgl. Gleichung (2.2.10). An den Rändern $x = \text{konstant}$ müssen die Beziehungen

$$\begin{aligned} K (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) &= -M_x = 0 & \text{oder } w_{,x} &= 0 \quad \text{und} \\ -K (w_{,xxx} + \nu w_{,xyy} + 2(1-\nu) w_{,xyy}) &= Q_x + M_{xy,y} = 0 & \text{oder } w &= 0 \end{aligned}$$

an den Rändern $y = \text{konstant}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} K (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) &= -M_y = 0 & \text{oder } w_{,y} &= 0 \quad \text{und} \\ -K (w_{,yyy} + \nu w_{,xxy} + 2(1-\nu) w_{,xxy}) &= Q_y + M_{xy,x} = 0 & \text{oder } w &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Die Summen aus an den Rändern wirkenden Querkraften und Änderungen der Drillmomente werden als Kirchhoffsche Ersatzquerkräfte bezeichnet.

$$\bar{Q}_x = Q_x + M_{xy,y}, \quad \bar{Q}_y = Q_y + M_{xy,x}. \quad (2.2.15)$$

Veranschaulichen kann man sich den Sachverhalt, indem man entlang eines Randes $x = \text{konstant}$ das Drillmoment M_{xy} als äquivalente Kräftepaare darstellt. Bildet man das Kräftegleichgewicht, bleibt am Abschnittsrand nur der Zuwachs $M_{xy,y}$ als effektive Kraftwirkung übrig, der dann zur Querkraft Q_x addiert werden muss. An den Ecken in den letzten Feldern zweier benachbarter Ränder tritt schließlich die sogenannte Eckenkraft

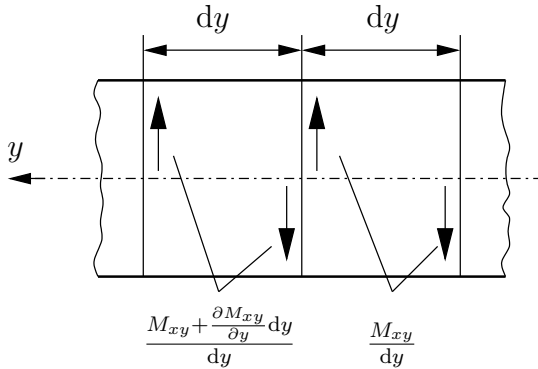


Abb. 2.6: Ersatzquerkraft

die sogenannte Eckenkraft

$$F = 2M_{xy} = -2K(1-\nu) w_{,xy} \quad (2.2.16)$$

auf. Die wichtigsten Randbedingungen einer Schubstarren Platte entlang eines Randes $x = \text{konstant}$ werden zusammengefasst:

$$\begin{array}{ll} \text{Freier Rand:} & M_x = 0, \quad \overline{Q}_x = 0. \\ \text{Gelenkig gelagerter Rand:} & w = 0, \quad M_x = 0. \\ \text{Eingespannter Rand:} & w = 0, \quad w_{,x} = 0. \end{array}$$

Für eine ausführlichere Einführung sei auf Becker [9], Gross [46], Schnell [41] oder Altenbach [1] verwiesen. Umfangreiche Beispielsammlungen sowie spezielle Lösungen sind in Timoshenko [99] und Girkmann [43] enthalten.

2.3 Klassische Laminattheorie

In diesem Kapitel soll in die Grundlagen der klassischen Laminattheorie eingeführt werden, soweit dies zum Verständnis dieser Arbeit nötig ist. Für weitergehende Informationen und ausführlichere Erläuterungen zur Modellierung und Berechnung von Compositen wird auf die Fachliteratur z.B. Altenbach [1, 2] oder Becker und Gross [9] verwiesen. Für den Konstrukteur ist vor allem Schürmann [77] interessant.

Ein Laminat oder auch Mehrschichtenverbund ist ein ebenes Flächentragwerk, das aus mehreren Einzelschichten, die ideal miteinander verbunden sind, besteht. Von großer technischer Bedeutung sind heute vor allem Faserverbundwerkstoffe. Diese bestehen in der Regel aus einem Verbund hochfester Fasern, z. B. Glas- oder Kohlenstofffasern, und einer sie umgebenden Kunststoffmatrix. Die Fasern übernehmen auf Grund ihrer hohen Steifigkeit und Festigkeit die tragende Funktion. Die Matrix dagegen stützt die Fasern, sorgt für die Kraftübertragung zwischen den Fasern und nimmt den Schub auf. Faser-Kunststoff-Verbunde besitzen gegenüber anderen Konstruktionswerkstoffen wie Metallen vor allem Vorteile bezüglich ihrer hohen Steifigkeit und hohen Festigkeit bei gleichzeitig niedriger Dichte. Dies macht sie zum idealen Leichtbauwerkstoff. Außerdem zeichnen sich Faser-Kunststoff-Verbunde durch ihre weitgehend freie Formgestaltung aus. Ihre elastischen Eigenschaften lassen sich je nach Anwendung und somit nach Bedarf einstellen. Daneben besitzen sie eine hohe Recyclebarkeit. Als Nachteil sind dagegen besonders ihr im Vergleich zu Metallen hoher Materialpreis zu sehen sowie bei hohen Stückzahlen auch ihre lohnintensive Fertigung.

2.3.1 Elastizitätsgesetz einer unidirektional faserverstärkten Einzelschicht

Die linear-elastischen Eigenschaften einzelner Laminatschichten können ein stark anisotropes Materialverhalten aufweisen, im Besonderen wenn sie unidirektional mit Fasern verstärkt sind. Zur Beschreibung dieses Materialverhaltens wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, dessen x_1 -Achse mit der Faserlängsrichtung zusammenfällt und dessen x_3 -Achse senkrecht auf der Einzelschicht steht. In diesem Fall handelt es sich dann um ein Materialhauptachsensystem. Im allgemeinen Fall der Anisotropie besitzt der Elastizitätstensor 21 voneinander unabhängige Komponenten. Die meisten Materialien und auch Faser-Kunststoff-Verbunde verfügen jedoch über bestimmte Symmetrieeigenschaften. So weist ein orthotropes Material drei senkrecht aufeinander stehende Symmetrieebenen auf. Ein typisches Beispiel für ein orthotropes Material ist ein Kunststoff, der durch Gewebe mit senkrecht aufeinander stehenden Faserrichtungen verstärkt ist. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften sind zur Beschreibung orthotropen Materialverhaltens nur neun voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten notwendig. Das Elastizitätsgesetz lässt

sich dann in Voigt-Notation wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Bei Orthotropie ist die Darstellung der Komponenten des Elastizitätstensors C_{ij} mittels sogenannter Ingenieurkonstanten üblich. Dies sind die drei verallgemeinerten Elastizitätsmoduli E_1, E_2 und E_3 , die sechs Querkontraktionszahlen $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}$ und ν_{32} sowie die drei Schubmoduli G_{23}, G_{13} und G_{12} . Wegen der Symmetrieeigenschaften gelten folgende Reziprozitätsbeziehungen:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (2.3.2)$$

Für die Komponenten des Elastizitätstensors gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}. \quad (2.3.3)$$

Bei unidirektional faserverstärkten Kunststoffen handelt es sich um transversal isotrope Materialien. Transversale Isotropie ist ein Sonderfall der Orthotropie. Zusätzlich zu den drei Symmetrieebenen orthotroper Materialien sind diese Materialien invariant bezüglich einer Drehung um eine Achse. Bei UD-Schichten von Faser-Kunststoff-Verbunden ist dies die x_1 -Achse, die in Faserlängsrichtung zeigt. Es gelten zusätzlich zu den Beziehungen bei Orthotropie folgende Relationen:

$$E_2 = E_3, \quad G_{12} = G_{13}, \quad \nu_{21} = \nu_{31}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}. \quad (2.3.4)$$

Es verbleiben somit nur fünf unabhängige Ingenieurkonstanten $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ und ν_{23} zur Beschreibung des Materialverhaltens. Innerhalb der klassischen Laminattheorie wird für die UD-Schicht auf Grund ihrer Dünnwandigkeit ein ebener Spannungszustand ange-

nommen. Somit verschwinden die Spannungskomponenten σ_3, τ_{13} und τ_{23} und das Elastizitätsgesetz der UD-Schicht ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Die Größen Q_{ij} werden als reduzierte Steifigkeiten bezeichnet und lauten in Ingenieurkonstanten wie folgt:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}. \quad (2.3.6)$$

Um das konstitutive Verhalten eines gesamten Laminats, also das Zusammenwirken verschiedener UD-Schichten beschreiben zu können, ist es notwendig ein globales Laminatkoordinatensystem einzuführen. Dieses ist um den Winkel ϑ bezüglich des Materialhauptachsensystems der UD-Schicht gedreht. Zwischen den Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy} des Laminatkoordinatensystems und den Spannungen σ_1, σ_2 und τ_{12} bestehen die Transformationsbeziehungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & -2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Die Transformationsbeziehungen zwischen den Verzerrungskomponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und γ_{12} sowie den Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ und γ_{xy} im Laminatkoordinatensystem lassen sich analog mit Hilfe der transponierten Transformationmatrix \mathbf{T}^T darstellen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin^2 \vartheta & \cos^2 \vartheta & -\cos \vartheta \sin \vartheta \\ -2 \cos \vartheta \sin \vartheta & 2 \cos \vartheta \sin \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Das Elastizitätsgesetz für die UD-Schicht lautet somit bezüglich des Laminatkoordinatensystems:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{Q} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.3.9)$$

2.3.2 Laminataufbau

Die effektiven mechanischen Eigenschaften eines Mehrschichtverbundes werden vor allem durch den Laminataufbau also die Schichtfolge der Einzelschichten bestimmt. Dieses Layup wird durch den Laminatcode charakterisiert. Dazu werden die Lagenwinkel ϑ der einzelnen Schichten in eckigen Klammern angegeben. Gestartet wird dabei von der unteren Deckschicht des Laminats bei $z = -h/2$. Dann folgen die Lagenwinkel der Schichten in Richtung der z -Achse des Laminatkoordinatensystems. Ein tief gestellter Index s kennzeichnet einen zur Mittelfläche symmetrischen Lagenaufbau. Ein Beispiel für einen symmetrischen Laminataufbau ist in Abb. 2.7 gegeben. Die Lage einer Einzelschicht ist durch den Abstand ihrer Unter- bzw. Oberseite zur Mittelfläche des Laminats gegeben. Zweckmäßigerweise nummeriert man die k Einzelschichten entlang der z -Achse. In Abb. 2.7 ist der Aufbau eines aus K Schichten bestehenden Laminats dargestellt.

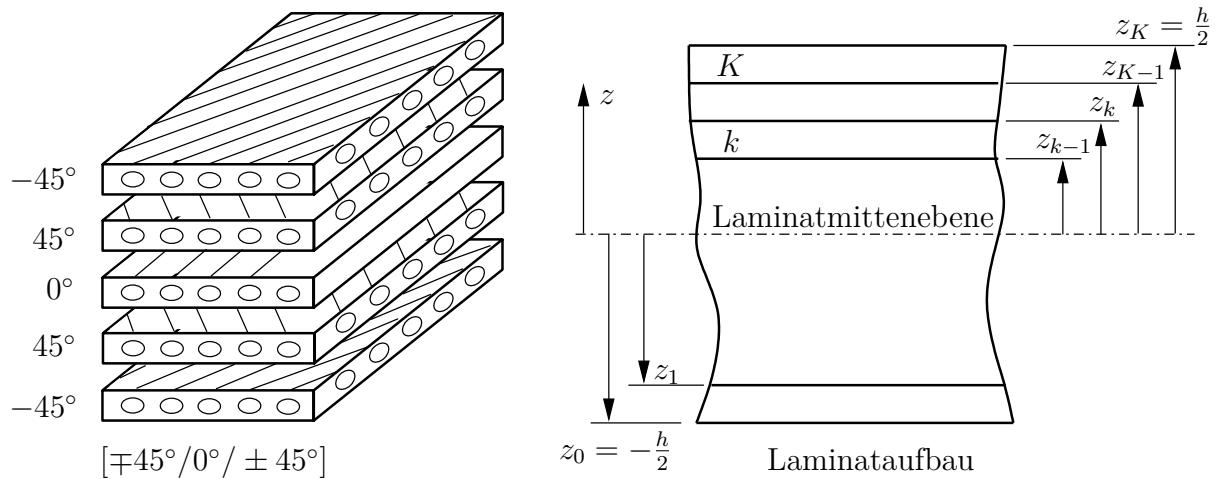


Abb. 2.7: Laminataufbau: Geometrie und Definition

2.3.3 Kinematik der klassischen Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie beschreibt das strukturmechanische Verhalten hinreichend dünner Lamine, wobei ihre Gültigkeit an gewisse Voraussetzungen gebunden ist. So müssen die Einzelschichten eben und parallel zur Mittelfläche des Laminats sein und ihre Dicke muss konstant bleiben. Außerdem müssen die Schichten ideal miteinander verklebt sein, so dass keine Verschiebungen zwischen ihnen auftreten. Weiterhin geht man von den kinematischen Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie aus. Normalen zur Mittelfläche bleiben bei der Deformation gerade und senkrecht zur deformierten Mittelfläche, womit die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden. Dickenänderungen des Laminats werden vernachlässigt ($\varepsilon_z = 0$). Desweiteren wird den Einzelschichten ein ebener Spannungszustand zu Grunde gelegt ($\sigma_z = 0$). Die Verschiebungen innerhalb des Laminats lassen sich deshalb mit den Verschiebungen der Laminatmittenebene u_0, v_0 und w_0 und

ihrer Neigungen $\partial w_0/\partial x$ sowie $\partial w_0/\partial y$ darstellen:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Außerdem geht man von kleinen Verformungen aus, womit sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3.11)$$

In Matrizenform lässt sich dieser Zusammenhang übersichtlich darstellen.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.3.12)$$

2.3.4 Konstitutives Verhalten des Laminats

Das Elastizitätsgesetz für eine beliebige Einzelschicht k lässt sich nun durch die Verzerungen der Laminatmittelebene darstellen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.3.13)$$

Nun führt man analog zur Kirchhoffschen Plattentheorie Schnittkräfte und Schnittmomente ein, indem man die über die Laminatdicke h verteilten Spannungen integriert. Für die Schnittkräfte gilt:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (2.3.14)$$

Für die Schnittmomente folgt:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (2.3.15)$$

Setzt man das Elastizitätsgesetz der Einzelschicht ein und integriert über die Laminatdicke und fasst die Resultate in Matrizenform zusammen, erhält man die Laminatsteifigkeitsmatrix zur Beschreibung des konstitutiven Laminatverhaltens.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}. \quad (2.3.16)$$

Die Dehnsteifigkeiten A_{ij} beschreiben das Scheibenverhalten, die Biegesteifigkeiten D_{ij} das Plattenverhalten des Laminats. Die Kopplungssteifigkeiten B_{ij} spiegeln die Interaktionen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten wieder. Im Einzelnen gilt:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Die Kopplungseigenschaften eines Laminats werden bestimmt vom Laminataufbau, d. h. der Schichtanzahl, der Schichtreihenfolge, der Lagenwinkel der Einzelschichten und ihrer Dicke. Biege-Dehn-Kopplungen treten auf, sobald irgendwelche Kopplungssteifigkeiten B_{ij} ungleich null sind. Symmetrische Laminats sind immer frei von Biege-Dehn-Kopplungen. Schubkopplungen treten auf, sobald die Dehnsteifigkeiten A_{16} oder A_{26} von null verschieden sind. Andernfalls handelt es sich um ein ausgeglichenes Laminat. Bei Biege-Drill-Kopplungen führen reine Krümmungen κ_x bzw. κ_y zu Drillmomenten M_{xy} und umgekehrt eine reine Verdrillung κ_{xy} zu Biegemomenten M_x und M_y . Sie treten auf, sobald D_{16} oder D_{26} ungleich null sind.

2.3.5 Gleichgewichtsbedingungen

Neben den kinematischen Beziehungen und konstitutiven Gleichungen gehören die Gleichgewichtsbedingungen zur vollständigen Problembeschreibung. Dies sind zum einen die Gleichgewichtsbedingungen der Scheibe

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = -p_x, \quad N_{xy,x} + N_{y,y} = -p_y, \quad (2.3.18)$$

zum anderen die Gleichgewichtsbedingungen der Plattentheorie

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0, \quad M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y = 0, \quad Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p. \quad (2.3.19)$$

Die Größen p_x und p_y stellen äußere Kräfte dar, die in x - bzw. y - Richtung pro Mittelfächeneinheit auf das Laminat wirken. Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems gehören noch Aussagen über die Randbedingungen. Für jeden Rand müssen dabei vier Bedingungen vorgeschrieben werden. Dies sind für das Scheibenverhalten Aussagen über die Verschiebung u_n oder die Schnittkraft N_n normal zum Rand sowie die Verschiebung u_t bzw. die Schnittkraft N_t tangential zum Rand. Für das Plattenverhalten müssen Aussagen über die Verdrehung $w_{,n}$ oder das Biegemoment M_n und die Verschiebung w oder die Kirchhoffsche Ersatzquerkraft $\bar{Q}_n = Q_n + M_{nt,t}$ getroffen werden.

2.4 Lösung von DGL-Systemen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.4.1 DGL-Systeme mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen

Gesucht wird die Fundamentallösung des homogenen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung mit konstanter Koeffizientenmatrix \mathbf{A}

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = [a_{jk}]_{j,k=1,\dots,n}, \quad a_{jk} = \text{konstant}. \quad (2.4.1)$$

Dazu berechnet man zuerst die Eigenwerte λ der Matrix \mathbf{A} . Für einen Eigenwert λ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.4.2)$$

eine nichttriviale Lösung $\boldsymbol{\psi}$. Dabei stellt \mathbf{E} die Einheitsmatrix dar und die nichttriviale Lösung $\boldsymbol{\psi}$ wird Eigenvektor genannt. Die Eigenwerte λ lassen sich aus dem charakteristischen Polynom, das aus

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad (2.4.3)$$

folgt, bestimmen. Bei symmetrischen Matrizen ($a_{jk} = a_{kj}$) sind alle Eigenwerte reell, die zugehörigen Eigenvektoren sind linear unabhängig und paarweise orthogonal. Fasst man die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gehörenden Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_n$ in einer Matrix $\mathbf{T} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_n]$ zusammen, lässt sich \mathbf{A} auf Diagonalform bringen.

$$\boldsymbol{\Theta} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Auf der Diagonalen von $\boldsymbol{\Theta}$ stehen dabei die Eigenwerte λ_j von \mathbf{A} . Diese Transformation wird Hauptachsentransformation genannt. Setzt man nun

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (2.4.5)$$

erhält man für das homogene System aus Gl. (2.4.1) das homogene System

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{z} \quad (2.4.6)$$

oder ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Diese n voneinander unabhängigen Differentialgleichungen besitzen die Lösungen $c_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, c_n e^{\lambda_n x}$. Die Lösungen des ursprünglichen DGL-Systems erhält man somit zu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z} = [\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \boldsymbol{\psi}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \boldsymbol{\psi}_n. \quad (2.4.8)$$

Die Lösungen $e^{\lambda_1 x} \boldsymbol{\psi}_1, \dots, e^{\lambda_n x} \boldsymbol{\psi}_n$ bilden für $x = 0$ und somit für jedes $x \in \mathbb{R}$, vgl. [14], ein Fundamentalsystem des DGL-Systems 1. Ordnung, da die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix \mathbf{A} linear unabhängig sind.

2.4.2 DGL-Systeme mit beliebigen Koeffizientenmatrizen

Ist \mathbf{A} eine beliebige (n, n) -Matrix, existiert in der Regel kein System von n linear unabhängigen Eigenvektoren. Die Matrix \mathbf{A} ist somit nicht diagonalisierbar und die Hauptachsentransformation ist nicht durchführbar. Um das DGL-System dennoch zu lösen, nutzt man die Transformation auf Jordansche Normalform. Dazu führt man Hauptvektoren ein. Ist λ_k ein Eigenwert der (n, n) -Matrix \mathbf{A} , dann wird $\boldsymbol{\psi}_k$ als Hauptvektor von \mathbf{A} bezeichnet, wenn er die Bedingung,

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})^q \boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{0}, \quad q \in \mathbb{N} \quad (2.4.9)$$

erfüllt. Von einem Hauptvektor q -ter Stufe $\boldsymbol{\psi}_k^q$ zu λ_k und \mathbf{A} spricht man, wenn der Vektor $\boldsymbol{\psi}_k^q$ folgendes erfüllt:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})^q \boldsymbol{\psi}_k^{(q)} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})^{q-1} \boldsymbol{\psi}_k^{(q)} \neq \mathbf{0}. \quad (2.4.10)$$

Bei Burg, Haf und Wille [13] wird gezeigt, dass jede reelle (n, n) -Matrix \mathbf{A} n linear unabhängige Hauptvektoren besitzt. Die zum Eigenwert λ_k gehörenden Hauptvektoren lassen

sich rekursiv wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(1)} &= 0 && \text{(Eigenvektoren)}, \\
 (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(2)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(1)} && \text{(Hauptvektoren 2.-ter Stufe)}, \\
 (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(3)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(2)} && \text{(Hauptvektoren 3.-ter Stufe)}, \\
 &\vdots && \\
 (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(q)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(q-1)} && \text{(Hauptvektoren q.-ter Stufe)}.
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Außerdem wird gefordert, dass die endliche Folge aus Gl. (2.4.11) nicht verlängerbar ist, d. h. dass $(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(q+1)} = \boldsymbol{\psi}_k^{(q)}$ keine Lösung $\boldsymbol{\psi}_k^{(q+1)}$ besitzt. $\boldsymbol{\psi}_k^{(q)}$ heißt dann Hauptvektor höchster Stufe. Mit den Eigenvektoren und Hauptvektoren, die zu den l verschiedenen Eigenwerten λ_k ($k = 1, \dots, l$) von \mathbf{A} gehören, läßt sich nun eine Transformationsmatrix \mathbf{T} formen:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_l] \tag{2.4.12}$$

mit den Matrizen \mathbf{T}_i :

$$\mathbf{T}_i = \left[\boldsymbol{\psi}_{k,1}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{k,1}^{(r_1)}, \boldsymbol{\psi}_{k,2}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{k,2}^{(r_2)}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{k,\alpha_i}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{k,\alpha_k}^{(r_{\alpha_k})} \right] \quad (k = 1, \dots, l). \tag{2.4.13}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{\psi}_{k,1}^{(r_1)}, \boldsymbol{\psi}_{k,2}^{(r_2)}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{k,\alpha_k}^{(r_{\alpha_k})}$ gehören dabei zum jeweiligen Eigenwert λ_k und stellen linear unabhängige Hauptvektoren höchster Stufe dar. Weiter läßt sich die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} in eine Matrix \mathcal{J} mit Halbdagonalform bzw. Jordanscher Normalform transformieren:

$$\mathcal{J} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{bmatrix}. \tag{2.4.14}$$

Die Untermatrizen \mathcal{J}_k werden Jordanzellen genannt. Sie haben folgende Form:

$$\mathcal{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu_i \tag{2.4.15}$$

Betrachtet man nun analog zum vorherigen Kapitel das DGL-System $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ mit beliebiger (n, n) -Matrix \mathbf{A} und setzt

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}, \quad (2.4.16)$$

so erhält man:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} = \mathcal{J}\mathbf{z}. \quad (2.4.17)$$

\mathcal{J} besitzt dabei Jordansche Normalform. Für eine separate Jordanzelle zu einem bestimmten Eigenwert λ mit Vielfachheit r erhält man folgendes DGL-System:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Dieses DGL-System löst man $z_r = c_1 e^{\lambda x}$ für die letzte Zeile und geht damit in die vorletzte Zeile, womit folgt:

$$z'_{r-1} = \lambda z_{r-1} + z_r = \lambda z_{r-1} + c_1 e^{\lambda x}. \quad (2.4.19)$$

Die Lösung dieser Zeile lautet: $z_{r-1} = c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$. Für die gesamte Jordanzelle erhält man den folgenden Lösungsvektor:

$$\begin{bmatrix} c_1 \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda x} + c_2 \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda x} + \dots + c_r e^{\lambda x} \\ c_1 \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda x} + \dots + c_{r-1} e^{\lambda x} \\ \vdots \\ c_1 e^{\lambda x} \end{bmatrix}. \quad (2.4.20)$$

Mit $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ lassen sich daraus Lösungen der Form

$$\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} e^{\lambda x} \boldsymbol{\psi}^{(1)} + \frac{x^{q-2}}{(q-2)!} e^{\lambda x} \boldsymbol{\psi}^{(2)} + \dots + \frac{x}{1} e^{\lambda x} \boldsymbol{\psi}^{(q-1)} + e^{\lambda x} \boldsymbol{\psi}^{(q)} \quad (2.4.21)$$

generieren, wobei $\boldsymbol{\psi}^{(q)}$ einen Hauptvektor höchster Stufe q zum Eigenwert λ darstellt. In der Praxis geht man nun folgendermaßen vor. Man bestimmt zunächst über das charakteristische Polynom die Eigenwerte. Anschließend bestimmt man zu jedem Eigenwert seine algebraische sowie seine geometrische Vielfachheit. Ist für einen Eigenwert die algebraische Vielfachheit größer als seine geometrische, so bestimmt man zu dem zum Eigenwert gehörenden Eigenvektor Hauptvektoren höherer Ordnung rekursiv nach Gl. (2.4.11) bis die endliche Folge abbricht. Zum Schluss bildet man mit den Hauptvektoren höherer Ordnung Lösungen der Form aus Gl. (2.4.21). So erhält man schließlich n linear unabhängige Lösungen und damit ein Fundamentalsystem als Lösung des DGL-Systems.

Kapitel 3

Neue Rand-Finite-Elemente-Formulierungen für Platten und Lamine

In diesem Kapitel werden neue Rand-Finite-Elemente-Formulierungen eines schubstarren Plattenelements und eines Laminelements vorgestellt. Die neuen Formulierungen für Platten und Lamine entstanden während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Darmstadt. Teile der neuen Elementformulierungen wurden auf internationalen Konferenzen für Platten [37, 38] und Lamine [35, 36] präsentiert. Die neuen Elementformulierungen stellen eine wesentliche Erweiterung der Rand-Finite-Elemente-Methode um Strukturelemente dar, da es sich bei den bisher in der Literatur bekannten Formulierungen mit Ausnahme der eigenen Arbeiten um 2d- bzw. 3d-Kontinuumsformulierungen handelt. Im ersten Schritt werden die sogenannten Rand-Finite-Elemente-Koordinaten eingeführt. Anschließend wird mit den skalierten Randkoordinaten die Geometrie des Problemgebiets durch eine Ähnlichkeitstransformation bezüglich eines Skalierungszentrums beschrieben. In dem dann folgenden Abschnitt wird die Approximation der Verschiebungen beschrieben. Bei der Approximation der Verschiebungen handelt es sich zusätzlich um eine wesentliche Neuerung, da wegen der dieser Arbeit zu Grunde liegenden Kirchhoffschen Plattenkinematik sichergestellt werden muss, dass neben den Verschiebungen auch die Neigungen der Platte stetig verlaufen müssen. Die Approximationen der Verschiebungen müssen also nicht nur C^0 -Stetigkeitsanforderungen wie bei Kontinuumsformulierungen sondern auch C^1 -Stetigkeitsanforderungen genügen. Um das Variationsprinzip der schubstarren Platte kompakt darstellen zu können, werden in dieser Arbeit in dieser Form in der Rand-Finite-Elemente-Methode neue Differentialoperatoren eingeführt und in den skalierten Randkoordinaten ausgedrückt. Diese Differentialoperatoren werden so allgemein formuliert, dass sie nicht nur bei linearer Geometrieinterpolation gültig sind, sondern auch bei Verwendung von Polynomen höherer Ordnung als Geometriefunktionen angewandt werden können. Über die schwache Formulierung des Randwertproblems lassen sich die für die Rand-Finite-Elemente-Methode typischen Differentialgleichungen zur Ermittlung der un-

bekannten Verschiebungsfunktionen herleiten. Im Gegensatz zu Kontinuumsformulierungen bei denen man ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung erhält, handelt es sich im Fall der schubstarren Platte um ein Differentialgleichungssystem 4. Ordnung vom Eulerschen Typ. Zur homogenen Lösung dieses Systems gelangt man über die Formulierung des zugeordneten Eigenwertproblems. Jeder Eigenwert mit seinem zugeordneten Eigenvektor kann als unabhängiger Deformationsmode der Platte aufgefasst werden, deren Gewichtung zur Gesamtlösung von den Randbedingungen abhängt. Mit der homogenen Lösung aus Eigenwerten und Eigenvektoren dieses Differentialgleichungssystems lässt sich dann die Steifigkeitsmatrix für die schubstarre Platte aufstellen. Durch Berücksichtigung kinematischer Randbedingungen lassen sich die Verschiebungen entlang des Rands und aus diesen wiederum die Wichtungskonstanten der einzelnen Deformationsmoden bestimmen. Der Vorteil der Rand-Finite-Elemente-Methode im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode ist, dass man in Skalierungsrichtung analytisch arbeitet, während man in Umfangsrichtung mit einer Näherung wie in der Finite-Elemente-Methode arbeitet. Untersucht man nun Risse oder Kerben mit der Rand-Finite-Elemente-Methode, so lässt sich nicht nur das Randwertproblem lösen, sondern man kann direkt die Singularität an der Rissspitze bzw. im Kerbgrund ablesen, wenn man das Skalierungszentrum in die Rissspitze bzw. den Kerbgrund legt ohne dabei besonders fein diskretisieren zu müssen. Dies ist mit der Finite-Elemente-Methode nicht ohne weiteres möglich. Man kann die Singularität an der Rissspitze in der FEM nur näherungsweise bestimmen, wobei dafür eine sehr feine Diskretisierung im Bereich der Rissspitze und damit verbunden ein hoher numerischer Aufwand erforderlich ist. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird ein Laminatenelement vorgestellt, mit dem sich gekoppelte Scheiben-Platten-Probleme, wie sie z. B. bei der Analyse von Faser-Kunststoff-Verbunden auftreten, beschreiben lassen. Diese Formulierungen, die die Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten beschreiben und aus dem Laminataufbau resultieren, und die Lösungen der daraus folgenden gekoppelten Differentialgleichungssysteme 4. Ordnung vom Eulerschen Typ sind im Rahmen der Rand-Finite-Elemente-Methode als vollkommen neu anzusehen.

3.1 Einleitende Überlegungen und Definitionen

3.1.1 Skalierung und Transformation der Geometrie

In der Rand-Finite-Elemente-Methode wird ein Gebiet durch die Skalierung seines Rands bezüglich eines Ähnlichkeitszentrums beschrieben. Dabei wird vorausgesetzt, dass das zu untersuchende Gebiet skalierbar ist. Zunächst wird ein Ähnlichkeitszentrum, das auch als Skalierungszentrum $S(x_0, y_0)$ bezeichnet wird, innerhalb des zu untersuchenden Gebiets gewählt. Skalierbar bedeutet nun, dass jeder Abschnitt des Rands dieses Gebiets vom gewählten Ähnlichkeitszentrum aus mit einer gedachten geraden Linie verbunden werden kann, ohne dass dabei ein anderer Teil des Rands von dieser gedachten Verbindungslinie geschnitten wird. Anschaulich ausgedrückt, muss der gesamte Rand vom

Ähnlichkeitszentrum aus sichtbar sein. Ist dies nicht der Fall, da in dem zu untersuchenden Gebiet z. B. Hinterschneidungen auftreten, muss es in mehrere Teilgebiete zerlegt werden, die jeweils für sich skalierbar sein müssen, um es mit der Rand-Finite-Elemente-Methode analysieren zu können. Im nächsten Schritt werden alle Koordinaten

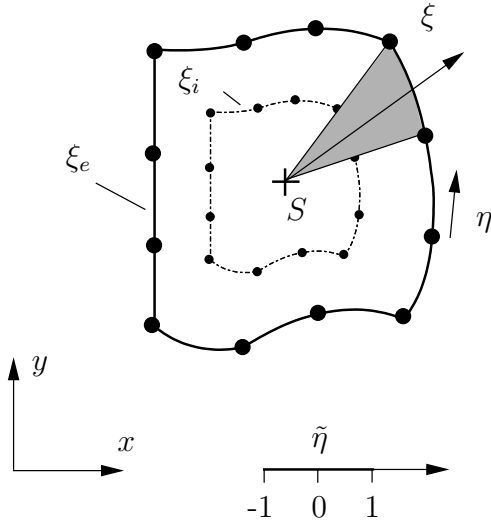


Abb. 3.1: Approximation der Geometrie

hingegen vom Ähnlichkeitszentrum S ($\xi = 0$) bzw. dem inneren Rand ($\xi = \xi_i$) zum äußeren Rand, wo $\xi_e = 1$ gilt. Mit Hilfe der Transformation

auf das Skalierungszentrum S bezogen. Ist \mathbf{x}_1 der Ortsvektor eines Punkts auf dem Rand des zu analysierenden Gebiets $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ in einem globalen kartesischen Koordinatensystem und \mathbf{x}_0 der Ortsvektor des Ähnlichkeitszentrums, so lässt sich dies durch die Transformation $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ bewerkstelligen. Anschließend werden die sogenannten skalierten Randkoordinaten eingeführt:

$$0 \leq \eta \leq \Gamma, \quad \xi_i \leq \xi \leq \xi_e. \quad (3.1.1)$$

Die Randkoordinate η beschreibt dabei die Länge entlang des Rands. Die normalisierte Skalierungskoordinate ξ läuft

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{x}_S = \mathbf{x}_0 + \xi (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (3.1.2)$$

lassen sich nun alle Punkte auf einer Verbindungslinie zwischen dem Randpunkt \mathbf{x}_1 und dem Skalierungszentrum \mathbf{x}_0 beschreiben. Prinzipiell lassen sich in der Rand-Finite-Elemente-Methode drei Skalierungsfälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} I : & \quad \xi_i \geq 0 \quad \wedge \quad \xi_e = 1, \\ II : & \quad \xi_i = 0 \quad \wedge \quad \xi_e = 1, \\ III : & \quad \xi_i = 1 \quad \wedge \quad \xi_e \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Fall *I* beschreibt ein zweifach berandetes Gebiet z. B. einen Kreisring oder aber auch eine Trapezplatte. Dies ist der allgemeinste Fall, da zum Aufbau der Lösung, wie später noch detailliert erläutert wird, das gesamte Lösungsspektrum benötigt wird. Die Skalierungsfälle *II* und *III* sind Sonderfälle. Bei Fall *II* läuft die Skalierungskoordinate vom Ähnlichkeitszentrum ($\xi_i = 0$) zum äußeren Rand ($\xi_e = 1$). Damit lassen sich z. B. Kreisplatten oder auch Dreiecksplatten beschreiben. Bei den Fällen *II* und *III* wird die Steifigkeitsmatrix nur aus der Hälfte der Eigenmoden gebildet. Wie später detailliert beschrieben wird, ist das Eigenwertspektrum symmetrisch zur Eins. Da im Fall *II* Eigenwerte $\lambda < 1$ zu unendlichen Verschiebungen oder Neigungen im Skalierungszentrum ($\xi \rightarrow 0$) führen würden, gehören sie nicht zum Lösungsraum des Randwertproblems. Eine Ausnahme bildet dabei

die Starrkörperverschiebung, die zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehört. Sie muss beim Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix immer berücksichtigt werden. Im Gegensatz dazu lässt sich ein unendlich ausgedehntes Gebiet durch den Skalierungsfall *III* darstellen. Auf Grund ihrer technischen Relevanz werden in dieser Arbeit nur die ersten beiden Skalierungsfälle behandelt.

3.1.2 Finite-Elemente-Diskretisierung

Der Rand des Gebiets wird nun mit finiten Elementen diskretisiert. Ein Element wird dabei bei linearer Geometrieinterpolation von zwei Knoten $\mathbf{x}_{S1} = (x_{S1}, y_{S1})$ und $\mathbf{x}_{S2} = (x_{S2}, y_{S2})$ aufgespannt. Der Index S gibt dabei an, dass die Knotenkoordinaten auf das Skalierungszentrum bezogen sind. In dieser Arbeit werden nun als geometrische Formfunktionen $\mathbf{N}_g(\tilde{\eta})$ zur Beschreibung der Geometrie lineare Funktionen der lokalen Randkoordinate $\tilde{\eta}$ eingeführt. Dadurch wird ein Einheitsselement in den Grenzen $-1 \leq \tilde{\eta} \leq 1$ aufgespannt, wie es in Abb. 3.1 rechts unten dargestellt ist. Ein Punkt auf dem äußeren Rand der Geometrie \mathbf{x}_{Se} lässt sich nun mit den geometrischen Formfunktionen bei linearer Geometrieinterpolation folgendermaßen beschreiben:

$$\mathbf{x}_{Se} = \mathbf{N}_g(\tilde{\eta})\mathbf{x}_{SK} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \tilde{\eta}) & 0 & \frac{1}{2}(1 + \tilde{\eta}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \tilde{\eta}) & 0 & \frac{1}{2}(1 + \tilde{\eta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \\ x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix}. \quad (3.1.4)$$

Die globale Randkoordinate η , die die Länge entlang des Rands beschreibt, und die normalisierte lokale Randkoordinate $\tilde{\eta}$ sind durch die Elementlänge l_e miteinander verknüpft:

$$\eta = \bar{\eta} + \frac{l_e}{2} \tilde{\eta}. \quad (3.1.5)$$

Dabei beschreibt $\bar{\eta}$ den Mittelpunkt des Elements in der globalen Koordinate η . Wird ein Element auf dem Rand durch zwei Punkte $\mathbf{x}_{S1} = (x_{S1}, y_{S1})$ und $\mathbf{x}_{S2} = (x_{S2}, y_{S2})$ aufgespannt, so lässt sich jeder Punkt innerhalb des Elements durch die folgende Transformation beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) &= \mathbf{x}_0 + \xi \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \tilde{\eta}) & 0 & \frac{1}{2}(1 + \tilde{\eta}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \tilde{\eta}) & 0 & \frac{1}{2}(1 + \tilde{\eta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \\ x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{N}_g(\tilde{\eta}) \mathbf{x}_{SK}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Nun lässt sich die gesamte Geometrie des zu untersuchenden Gebiets elementweise mittels der oben aufgeführten Beziehung approximieren.

3.1.3 Approximation der Verschiebungen

In der Rand-Finite-Elemente-Methode werden die Verschiebungen als Produktansatz aus bekannten Formfunktionen $\mathbf{N}_w(\tilde{\eta})$ und unbekannten Verschiebungsfunktionen der Skalierungskoordinate $\mathbf{w}(\xi)$ approximiert. Über das PdvV lässt sich ein System Eulerscher Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen herleiten, das analytisch gelöst werden kann. Dieser Arbeit liegt die Kirchhoffsche Plattentheorie zu Grunde. Die Verschiebungen der Platte hängen somit nach Gl. (2.2.1) linear mit der Dickenkoordinate z von der Neigung der Plattenmittelebene ab. Da vorausgesetzt wird, dass die Platte Schubstarr ist ($\boldsymbol{\varphi} + \nabla w = 0$), werden die Verdrehungen der Platte aus ihrer transversalen Verschiebung w abgeleitet. Für die Approximation der Verschiebungen bedeutet dies, dass sowohl die Plattenneigungen $\partial w / \partial x_i$ als auch die Verschiebung w über das gesamte Gebiet stetig sein müssen.

In der Rand-Finite-Elemente-Methode werden die Verschiebungen $w(\xi, \eta)$ als Produkt aus Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_w(\tilde{\eta})$ und unbekannter Funktionen $\mathbf{w}(\xi)$ der Skalierungskoordinate ξ approximiert. Die Elementfreiheitsgrade sind also im Gegensatz zur Methode der finiten Elemente nicht an diskreten Knotenpunkten definiert, sondern stellen Funktionen

von ξ dar, die für ein konstantes η vom Skalierungszentrum S ausgehen und zum Elementrand hin verlaufen. Damit sowohl die Verschiebungen als auch die Neigungen der Platte stetig sind, müssen die Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_w(\tilde{\eta})$ für die Approximation der Verschiebungen der Platte C_1 -Kontinuitätsanforderungen erfüllen. Gewährleistet wird dies durch den Einsatz hermitescher Polynome als Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_w(\tilde{\eta})$. Die Approximation der Verschiebungen lässt sich folgendermaßen darstellen:

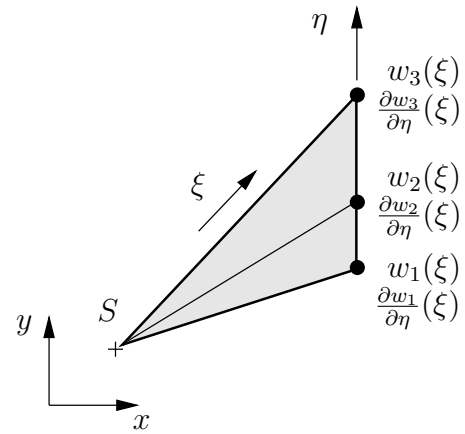


Abb. 3.2: Approximation der Verschiebungen

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{N}_w(\tilde{\eta}) \mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2 - 3\tilde{\eta} + \tilde{\eta}^3) \\ \frac{l_e}{8}(1 - \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^2 + \tilde{\eta}^3) \\ \frac{1}{4}(2 + 3\tilde{\eta} - \tilde{\eta}^3) \\ \frac{l_e}{8}(-1 - \tilde{\eta} + \tilde{\eta}^2 + \tilde{\eta}^3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_1(\xi) \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta}(\xi) \\ w_2(\xi) \\ \frac{\partial w_2}{\partial \eta}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Darin beschreibt l_e die Elementlänge. Entlang eines Elementrands ($\eta = \text{konstant}$) treten somit als Freiheitsgrade die Verschiebung $w_i(\xi)$ sowie die Plattenneigung $\partial w_i / \partial \eta(\xi)$ als unbekannte Funktionen von ξ auf. Die Approximation der Verschiebungen in der Rand-Finite-Elemente-Methode für Kirchhoff-Platten entspricht somit weitestgehend der Approximation der Verschiebungen für Balken in der FEM, wenn die Bernoullische Bal-

kentheorie zu Grunde gelegt wird, vgl. Zienkiewicz [119, 120]. Der wesentliche Unterschied beider Diskretisierungen besteht darin, dass im Gegensatz zur FEM in der SBFEM die Freiheitsgrade unbekannte Funktionen der Skalierungsordinate ξ sind.

3.1.4 Formulierung von Differentialoperatoren

In der Rand-Finite-Elemente-Methode wird die partielle Differentialgleichung der Platte und später die des Laminats in schwacher Form dargestellt. Dazu wird zunächst das PdvV der schubstarken Platte aufgestellt und anschließend in den Randkoordinaten ξ und η ausgedrückt. Die in diesen Gleichungen auftretenden partiellen Ableitungen bezüglich der kartesischen Koordinaten x und y müssen deshalb mit Hilfe der Jacobi-Matrix \mathbf{J} als partielle Ableitungen nach den Randkoordinaten ξ bzw. η formuliert werden.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}^x \mathbf{x}_s & \hat{\mathbf{n}}^y \mathbf{x}_s \\ \xi \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^x \mathbf{x}_s & \xi \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^y \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.1.8)$$

Durch Inversion der Gl. (3.1.8) mit Hilfe der Cramerschen Regel lassen sich die partiellen Ableitungen in kartesischen Koordinaten durch die Randkoordinaten ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \xi \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^y \mathbf{x}_s & -\hat{\mathbf{n}}^y \mathbf{x}_s \\ -\xi \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^x \mathbf{x}_s & \hat{\mathbf{n}}^x \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^* & j_{12}^* \\ j_{21}^* & j_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.1.9)$$

Für die Determinante der Jacobi-Matrix \mathbf{J} gilt die folgende Beziehung:

$$\det \mathbf{J} = \xi \det \mathbf{J}^* = \xi \left(\hat{\mathbf{n}}^x \mathbf{x}_s \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^y \mathbf{x}_s - \hat{\mathbf{n}}^y \mathbf{x}_s \hat{\mathbf{n}}_{,\eta}^x \mathbf{x}_s \right). \quad (3.1.10)$$

In der Finite-Elemente-Methode ist es üblich, Differentialoperatoren einzuführen, um das Prinzip der virtuellen Verrückungen kompakt darzustellen. Gleiches ist auch vorteilhaft in der Rand-Finite-Elemente-Methode. So führt man z. B. den Differentialoperator \mathcal{L} ein, um die kinematischen Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen aus Gl. (2.2.2) kompakt in Matrizenschreibweise $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L} \mathbf{u}$ darzustellen. Für den Differentialoperator \mathcal{L} gilt dabei:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}_1(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_2(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} j_{11}^* & 0 \\ 0 & j_{21}^* \\ j_{21}^* & j_{11}^* \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} j_{12}^* & 0 \\ 0 & j_{22}^* \\ j_{22}^* & j_{12}^* \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (3.1.11)$$

Es ist zweckmäßig, den Verzerrungs-Verschiebungs-Operator \mathcal{L} in Randkoordinaten in Form einer additiven Zerlegung darzustellen. Die Matrix $\hat{\mathbf{B}}_1$ beschreibt dabei die partielle Ableitung bezüglich der Skalierungscoordinate ξ , $\hat{\mathbf{B}}_2$ steht dagegen in Verbindung mit der partiellen Ableitung bezüglich η . Beide Matrizen $\hat{\mathbf{B}}_1$ und $\hat{\mathbf{B}}_2$ enthalten nur Einträge der inversen Jacobi-Matrix und hängen deshalb ausschließlich von der Geometrie des Rands ab. Der Nabla-Operator ∇ lässt sich analog zum Differentialoperator \mathcal{L} formulieren:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}_3(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_4(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} j_{11}^* \\ j_{21}^* \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \begin{bmatrix} j_{12}^* \\ j_{22}^* \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (3.1.12)$$

Die Matrizen $\hat{\mathbf{B}}_3$ und $\hat{\mathbf{B}}_4$ hängen ebenfalls nur von der Randgeometrie ab. Wegen der kinematischen Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie lassen sich die Verzerrungen durch die Verkrümmungen der Plattenmittelebene darstellen. Dazu benötigt man die zweiten partiellen Ableitungen bezüglich x und y , die sich als Produkt von \mathcal{L} und Nabla-Operator ∇ ausdrücken lassen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Matrizen $\hat{\mathbf{B}}_i(\tilde{\eta})$ von der Randgeometrie und damit von der Coordinate $\tilde{\eta}$ abhängen. Unter Anwendung der Kettenregel und Beachtung des Zusammenhangs aus Gl. (3.1.5) folgt schließlich:

$$\mathcal{L}\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_5(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_6(\tilde{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} + \hat{\mathbf{B}}_7(\tilde{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_8(\tilde{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_9(\tilde{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}. \quad (3.1.13)$$

Diese Vorgehensweise sowie die Formulierung dieses Produkts aus Differentialoperatoren in skalierten Randkoordinaten stellt dabei eine wesentliche Neuerung in der Rand-Finite-Elemente-Methode dar. Werden für die Interpolation der Geometrie lineare Ansatzfunktionen verwendet, gilt: $\hat{\mathbf{B}}_5(\tilde{\eta}) = 0$. Die restlichen Matrizen $\hat{\mathbf{B}}_i$ werden wiederum mit Hilfe der Komponenten der inversen Jacobi-Matrix dargestellt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_6(\tilde{\eta}) &= \begin{bmatrix} -2j_{11}^* j_{12}^* \\ -2j_{21}^* j_{22}^* \\ -2(j_{11}^* j_{22}^* + j_{12}^* j_{21}^*) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_7(\tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} j_{11}^{*2} \\ j_{21}^{*2} \\ 2j_{11}^* j_{21}^* \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_9(\tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} 2j_{11}^* j_{12}^* \\ 2j_{21}^* j_{22}^* \\ 2(j_{11}^* j_{22}^* + j_{12}^* j_{21}^*) \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{B}}_8(\tilde{\eta}) &= \begin{bmatrix} j_{12}^{*2} \\ j_{22}^{*2} \\ 2j_{12}^* j_{22}^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

3.2 Das schubstarre Plattenelement in der RFEM

3.2.1 Variationsprinzip / Herleitung der Differentialgleichungen

Ausgangspunkt für die Herleitung der Differentialgleichungen der Rand-Finite-Elemente-Methode ist analog zur Finiten-Elemente-Methode die schwache Form der Randwertaufgabe $\delta W_i = \delta W_a$. Die Entwicklung des schubstarren Plattenelements folgt dabei im Wesentlichen der Vorgehensweise von Deeks zur Herleitung eines Scheibenelements in der Rand-Finite-Elemente-Methode [28]. Vernachlässigt man Volumenlasten p sowie thermische und hygrothermische Belastungen und nimmt an, dass die Platte geschlossen ist oder anderenfalls die Seitenränder bei einem konstanten η frei seien, so lautet das Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}\nabla\delta w)^T \mathbf{D}_D (\mathcal{L}\nabla w) d\Omega = \int_{\Gamma_n} \delta\phi_n m_n d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta\phi_t m_t d\Gamma + \int_{\Gamma_z} \delta w f_z d\Gamma. \quad (3.2.1)$$

Die Größe Ω beschreibt dabei die Fläche der Plattenmittenebene. \mathbf{D}_D stellt die Plattensteifigkeiten dar und \mathcal{L} sowie ∇ die in Kapitel 3.1.4 definierten Differentialoperatoren. Die Verschiebung w und die Verdrehungen ϕ sind die gesuchten Größen, wobei für die schubstarre Platte die Kirchhoffschen Annahmen ($\nabla w + \phi = 0$) gelten. Die Größen m_n, m_t und f_z stellen Spannungsergebnisse auf den zugehörigen Abschnitten Γ_n, Γ_t und Γ_z des Plattenrands dar. Die virtuellen Verschiebungen δw werden auf gleiche Weise wie die Verschiebungen w in Gl. (3.1.7) approximiert. Anschließend wird das PdV in skalierten Rand-Koordinaten formuliert, wobei man für die innere virtuelle Arbeit δW_i folgende Beziehung erhält:

$$\begin{aligned} \delta W_i = \int_0^{\Gamma} \int_{\xi_i}^{\xi_e} & \left(\left(\frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_6 \frac{\partial}{\partial \eta} + \hat{\mathbf{B}}_7 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_8 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_9 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) \mathbf{N}_w \delta \mathbf{w}_h \right)^T \mathbf{D}_D \\ & \left(\left(\frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_6 \frac{\partial}{\partial \eta} + \hat{\mathbf{B}}_7 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{B}}_8 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \hat{\mathbf{B}}_9 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) \mathbf{N}_w \mathbf{w}_h \right) \xi \det \mathbf{J}^* d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Der Übersichtlichkeit halber werden die folgenden Hilfsgrößen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{6w}(\tilde{\eta}) &= \hat{\mathbf{B}}_6 \mathbf{N}_{w,\eta}(\tilde{\eta}), & \mathbf{B}_{7w}(\tilde{\eta}) &= \hat{\mathbf{B}}_7 \mathbf{N}_w(\tilde{\eta}), & \mathbf{B}_{8w}(\tilde{\eta}) &= \hat{\mathbf{B}}_8 \mathbf{N}_{w,\eta\eta}(\tilde{\eta}), \\ \mathbf{B}_{9w}(\tilde{\eta}) &= \hat{\mathbf{B}}_9 \mathbf{N}_{w,\eta}(\tilde{\eta}). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Anschließend werden die Integrale entlang des Randes Γ elementweise mit Hilfe der Gauß-Quadratur berechnet und zu den Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Di} assembliert. Die Assemblierung der Randsteifigkeitsmatrizen erfolgt dabei analog der Assemblierung der Gesamtstei-

figkeitsmatrix \mathbf{K} in der Finiten-Elemente-Methode. Die einzelnen Randsteifigkeitsmatrizen sind nachfolgend aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{D0} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_{7w}^T \mathbf{D}_D \mathbf{B}_{7w} \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D1} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_{7w}^T \mathbf{D}_D \mathbf{B}_{9w} \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
 \mathbf{E}_{D2} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_{7w}^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_{6w} + \mathbf{B}_{8w}) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D3} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_{9w}^T \mathbf{D}_D \mathbf{B}_{9w} \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
 \mathbf{E}_{D4} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_{9w}^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_{6w} + \mathbf{B}_{8w}) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D5} &= \int_0^\Gamma (\mathbf{B}_{6w} + \mathbf{B}_{8w})^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_{6w} + \mathbf{B}_{8w}) \det \mathbf{J}^* d\eta.
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Die virtuelle innere Arbeit δW_i lässt sich nach der Integration entlang des diskretisierten Rands mit Hilfe der Randsteifigkeitsmatrizen aus Gl. (3.2.4) in folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned}
 \delta W_i &= \int_{\xi_i}^{\xi_e} \left[\delta \mathbf{w}_{h,\xi\xi}^T \left(\mathbf{E}_{D0} \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{D1} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D2} \mathbf{w}_h \right) \right. \\
 &\quad + \delta \mathbf{w}_{h,\xi}^T \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{D1}^T \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D3} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{D4} \mathbf{w}_h \right) \\
 &\quad \left. + \delta \mathbf{w}_h^T \left(\frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D2}^T \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{D4}^T \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^4} \mathbf{E}_{D5} \mathbf{w}_h \right) \right] \xi d\xi. \tag{3.2.5}
 \end{aligned}$$

Anschließend werden die einzelnen Terme der inneren virtuellen Arbeit δW_i bis zu zweimal partiell bezüglich der Skalierungskoordinate ξ integriert. δW_i lässt sich dann als Summe eines Integrals und zweier Terme, die auf den Rändern bei ξ_i und ξ_e ausgewertet werden müssen, formulieren.

$$\begin{aligned}
 \delta W_i &= \int_{\xi_i}^{\xi_e} \delta \mathbf{w}_h^T \left[\mathbf{E}_0 \xi \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi\xi} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T) \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi} + (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3) \frac{1}{\xi} \mathbf{w}_{h,\xi\xi} \right. \\
 &\quad \left. + (-2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T) \frac{1}{\xi^2} \mathbf{w}_{h,\xi} + (2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5) \frac{1}{\xi^3} \mathbf{w}_h \right] d\xi \\
 &\quad + \left[\delta \mathbf{w}_{h,\xi}^T \left[\xi \mathbf{E}_0 \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \mathbf{E}_1 \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_2 \mathbf{w}_h \right] \right]_{\xi_i}^{\xi_e} \\
 &\quad + \left[\delta \mathbf{w}_h^T \left[-\xi \mathbf{E}_0 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi} + (-\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T) \mathbf{w}_{h,\xi\xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\xi} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \mathbf{w}_h \right] \right]_{\xi_i}^{\xi_e}. \tag{3.2.6}
 \end{aligned}$$

Die äußere virtuelle Arbeit δW_a wird ebenfalls in skalierten Randkoordinaten dargestellt. Man erhält

$$\delta W_a = \delta \mathbf{w}^T(\xi_e) \mathbf{f}(\xi_e) + \delta \mathbf{w}^T(\xi_i) \mathbf{f}(\xi_i) + \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi_e) \mathbf{m}(\xi_e) + \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi_i) \mathbf{m}(\xi_i) \quad (3.2.7)$$

mit den folgenden Komponenten an den Knoten:

$$\mathbf{f} = [f_z] \quad \text{und} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_n \\ m_t \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Damit die Gleichgewichtsbedingungen zwischen innerer virtueller Arbeit δW_i und äußerer virtueller Arbeit δW_a für beliebige virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{w}_h(\xi)$, die unbekannte Funktionen der Koordinate ξ sind, immer erfüllt sind, muss der Integrand des Integrals aus Gleichung (3.2.6) verschwinden. Aus dieser Forderung resultiert ein homogenes Differentialgleichungssystem 4. Ordnung vom Euler-Cauchy Typ zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen $\mathbf{w}_h(\xi)$. Zusätzlich müssen die Terme, die auf den Rändern ausgewertet werden, mit den äußeren Knotenkräften und -momenten im Gleichgewicht stehen. Die daraus resultierenden drei Gleichungssysteme sind im Folgenden aufgeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \xi^4 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi\xi}(\xi) + [2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T] \xi^3 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi) + [\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3] \xi^2 \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi) \\ + [-2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T] \xi \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi) + [2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5] \mathbf{w}_h(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} -\xi_i \mathbf{E}_0 & -\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T & \frac{1}{\xi_i} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) & \frac{1}{\xi_i^2} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \\ 0 & \xi_i \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \frac{1}{\xi_i} \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_h(\xi_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\xi_i) \\ \mathbf{m}(\xi_i) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -\xi_e \mathbf{E}_0 & -\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T & \frac{1}{\xi_e} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) & \frac{1}{\xi_e^2} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \\ 0 & \xi_e \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \frac{1}{\xi_e} \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_h(\xi_e) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\xi_e) \\ \mathbf{m}(\xi_e) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Gleichung (3.2.9) stellt das DGL-System 4. Ordnung zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen $\mathbf{w}(\xi)$ dar. Aus den Gleichungen (3.2.10) lässt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix unter Verwendung der Lösungen des Systems Eulerscher Differentialgleichungen konstruieren. Das Vorgehen wird dabei im folgenden Kapitel beschrieben.

3.2.2 Homogene Lösung der Differentialgleichungen der Platte

Die Differentialgleichungen in (3.2.9) bilden ein System Eulerscher Differentialgleichungen 4. Ordnung. Eulersche Differentialgleichungen sind analytisch lösbar. Mit der Substitution $\xi = e^t$, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{w}_h(e^t)$ lassen sich die Eulerschen Differentialgleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen, womit die Lösung, wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben, fortgeführt werden kann. Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{w}_h(e^t) \\ \mathbf{z}_{,t}(t) &= e^t \mathbf{w}_{h,t}(e^t) \\ \mathbf{z}_{,tt}(t) &= e^t \mathbf{w}_{h,t}(e^t) + e^{2t} \mathbf{w}_{h,tt}(e^t) \\ \mathbf{z}_{,ttt}(t) &= e^t \mathbf{w}_{h,t}(e^t) + 3e^{2t} \mathbf{w}_{h,tt}(e^t) + e^{3t} \mathbf{w}_{h,ttt}(e^t) \\ \mathbf{z}_{,tttt}(t) &= e^t \mathbf{w}_{h,t}(e^t) + 7e^{2t} \mathbf{w}_{h,tt}(e^t) + 6e^{3t} \mathbf{w}_{h,ttt}(e^t) + e^{4t} \mathbf{w}_{h,tttt}(e^t)\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

lassen sich die unbekannten Verschiebungsfunktionen $\mathbf{w}_h(\xi)$ und ihre Ableitungen in dem Differentialgleichungssystem (3.2.9) durch die folgenden Ausdrücke substituieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_h(\xi) &= \mathbf{z}(t) \\ \xi \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi) &= \mathbf{z}_{,t}(t) \\ \xi^2 \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi) &= \mathbf{z}_{,tt}(t) - \mathbf{z}_{,t}(t) \\ \xi^3 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi) &= \mathbf{z}_{,ttt}(t) - 3\mathbf{z}_{,tt}(t) + 2\mathbf{z}_{,t}(t) \\ \xi^4 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi\xi}(\xi) &= \mathbf{z}_{,tttt}(t) - 6\mathbf{z}_{,ttt}(t) + 11\mathbf{z}_{,tt}(t) - 6\mathbf{z}_{,t}(t).\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

Man erhält damit ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 4. Ordnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 \mathbf{z}_{,tttt}(t) &+ \left(-4\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T\right) \mathbf{z}_{,ttt}(t) + \left(5\mathbf{E}_0 - 3\mathbf{E}_1 + 3\mathbf{E}_1^T + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3\right) \mathbf{z}_{,tt}(t) \\ &+ \left(-2\mathbf{E}_0 + 2\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_1^T - 3\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2^T + 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T\right) \mathbf{z}_{,t}(t) + (2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5) \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

Zur Lösung dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen wählt man den bekannten Ansatz $\mathbf{z}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\psi}$ und substituiert diesen in die Differentialgleichungen (3.2.13), womit man ein Eigenwertproblem 4. Ordnung erhält:

$$\begin{aligned}\left[\lambda^4 \mathbf{E}_0 + \lambda^3 \left(-4\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T\right) + \lambda^2 \left(5\mathbf{E}_0 - 3\mathbf{E}_1 + 3\mathbf{E}_1^T + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3\right) \right. \\ \left. + \lambda \left(-2\mathbf{E}_0 + 2\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_1^T - 3\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2^T + 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T\right) + (2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5) \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

Zu diesem Eigenwertproblem gelangt man ebenfalls, wenn man alternativ direkt den Ansatz $\mathbf{w}_h(\xi) = \xi^\lambda \boldsymbol{\psi}$ in das System Eulerscher Differentialgleichungen (3.2.9) einsetzt.

Die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_i hängen, wie bereits erwähnt, nur von der Geometrie des Rands ab. Mehrmann [64] zeigt nun, dass für Eigenwertprobleme mit konstanten Koeffizientenmatrizen, die alternierend symmetrisch und schiefsymmetrisch sind, die Eigenwertspektren symmetrisch sind. Reelle Eigenwerte treten folglich immer als Paare $(\lambda_k, -\lambda_k)$, komplexe hingegen als Quadrupel $(\lambda_k, \bar{\lambda}_k, -\lambda_k, -\bar{\lambda}_k)$ auf, wobei $\bar{\lambda}_k$ konjugiert komplexe Eigenwerte bezüglich λ_k darstellen. Die Koeffizientenmatrizen in Gl. (3.2.14) sind aber weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch und damit natürlich auch nicht alternierend symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch. Es läßt sich jedoch zeigen, dass durch Substitution von $\lambda = \lambda_S + 1$ in Gl. (3.2.14) ein Eigenwertproblem 4. Ordnung mit alternierend symmetrischen und schiefsymmetrischen Koeffizientenmatrizen resultiert. Damit folgt nach Mehrmann [64], dass das Eigenwertspektrum des Eigenwertproblems aus Gl. (3.2.14) symmetrisch zur Eins ist. Reelle Lösungen treten somit immer als Paar $(\lambda_S + 1, -\lambda_S + 1)$, komplexe folglich als Quadrupel $(\lambda_S + 1, \bar{\lambda}_S + 1, -\lambda_S + 1, -\bar{\lambda}_S + 1)$ auf. Diese Symmetrieeigenschaften kann man auch bei analytischen Plattenlösungen, wie sie bei Timoshenko [99] und Girkmann [43] aufgeführt werden, beobachten. Das Eigenwertproblem 4. Ordnung wird nun auf ein Eigenwertproblem 1. Ordnung transformiert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_4 & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \lambda^3 \psi \\ \lambda^2 \psi \\ \lambda \psi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^3 \psi \\ \lambda^2 \psi \\ \lambda \psi \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Bei den Einträgen \mathbf{E} handelt es sich um die Einheitsmatrix, $\mathbf{0}$ steht für die Nullmatrix, für die restlichen Einträge der Koeffizientenmatrix \mathcal{H} gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4 &= \mathbf{E}_{D0}^{-1}(-4\mathbf{E}_{D0} + \mathbf{E}_{D1} - \mathbf{E}_{D1}^T), \\ \mathbf{H}_3 &= \mathbf{E}_{D0}^{-1}(5\mathbf{E}_0 - 3\mathbf{E}_1 + 3\mathbf{E}_1^T + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_3), \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{E}_{D0}^{-1}(-2\mathbf{E}_0 + 2\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_1^T - 3\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2^T + 2\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_4^T), \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{E}_{D0}^{-1}(2\mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Alle Einträge der Koeffizientenmatrix \mathcal{H} besitzen die Dimension $n \times n$, so dass \mathcal{H} von der Dimension $4n \times 4n$ ist. Über das charakteristische Polynom von Gl. (3.2.15) lassen sich die Eigenwerte λ_k und anschließend die Eigenvektoren bestimmen. Da aber die Koeffizientenmatrix \mathcal{H} nicht symmetrisch ist, vgl. Gl. (3.2.15), läßt sich das DGL-System (3.2.13) nicht durch Hauptachsentransformation lösen. Es gibt folglich nicht zu allen Eigenwerten genügend linear unabhängige Eigenvektoren, um aus ihnen ein Fundamentalsystem zu bilden. Anders ausgedrückt, entspricht nicht für jeden Eigenwert seine geometrische Vielfachheit seiner algebraischen Vielfachheit. Um die Differentialgleichungen (3.2.9) und das daraus resultierende Eigenwertproblem (3.2.14) dennoch zu lösen, transformiert man es auf Jordansche Normalform. Dabei geht man wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben vor. In die-

ser Arbeit wird nur die zum Verständnis erforderliche Zerlegung näher beschrieben. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf die einschlägige Literatur [13, 14, 121] verwiesen. Zunächst bestimmt man aus dem charakteristischen Polynom die Eigenwerte λ_k von \mathcal{H} und berechnet die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren. Anschließend ermittelt man die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts. Ist die algebraische Vielfachheit μ_k eines Eigenwerts größer als seine geometrische Vielfachheit κ_k , bestimmt man nun die zu diesem Eigenwert gehörenden Hauptvektoren rekursiv über die Folge

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(1)} &= 0 && \text{(Eigenvektoren)}, \\ (\mathcal{H} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(2)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(1)} && \text{(Hauptvektoren 2.-ter Stufe)}, \\ (\mathcal{H} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(3)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(2)} && \text{(Hauptvektoren 3.-ter Stufe)}, \\ &\vdots && \\ (\mathcal{H} - \lambda_k \mathbf{E}) \boldsymbol{\psi}_k^{(q)} &= \boldsymbol{\psi}_k^{(q-1)} && \text{(Hauptvektoren q.-ter Stufe)}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Für das hier formulierte Plattenelement endet in der Regel diese Folge nach der 2. Zeile, so dass zur Lösung dieses DGL-Systems schließlich nur die beiden letzten Terme von Gl. 2.4.21 aus Kapitel 2.4.2 benötigt werden. Die Lösung lautet nun:

$$\mathbf{z}(t) = \left[t e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\psi}_k^{(1)} + e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\psi}_k^{(2)} \right] \mathbf{c}_k. \quad (3.2.18)$$

Da die Matrix \mathcal{H} aus Gl. (3.2.15) nicht symmetrisch ist, treten in der Regel bei der Lösung des Eigenwertproblems konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ bzw. $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}_k = \mathbf{a}_k + i\mathbf{b}_k$ bzw. $\bar{\boldsymbol{\psi}}_k = \mathbf{a}_k - i\mathbf{b}_k$ auf. Aus diesen konjugiert komplexen Eigenwerten und ihren zugehörigen Eigenvektoren folgen mit Hilfe der Eulerschen Formel zwei reelle Lösungsanteile:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k(t) &= \left[e^{\alpha_k t} (\cos(\beta_k t) \mathbf{a}_k - \sin(\beta_k t) \mathbf{b}_k) \right] c_k, \\ \mathbf{z}_{k+1}(t) &= \left[e^{\alpha_k t} (\sin(\beta_k t) \mathbf{a}_k + \cos(\beta_k t) \mathbf{b}_k) \right] c_{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Fasst man die Eigenvektoren und Hauptvektoren unter Berücksichtigung ihrer Real- und Imaginärteile geeignet zu Matrizen $\boldsymbol{\Psi}^I$ und $\boldsymbol{\Psi}^{II}$ zusammen und führt den Faktor γ ein, lässt sich die Lösung nun folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{z}(t) = \left[\boldsymbol{\Psi}^I [e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) + \gamma e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)] + \boldsymbol{\Psi}^{II} [t e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) + \gamma t e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)] \right] \mathbf{c}_k. \quad (3.2.20)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\Psi}^I$ wird aus den Eigenvektoren bzw. Hauptvektoren zu den Eigenwerten λ_k gebildet, dagegen enthält $\boldsymbol{\Psi}^{II}$ nur Eigenvektoren zu den Eigenwerten, deren algebraische Vielfachheit größer als ihre geometrische ist. Der Faktor γ bezieht sich auf das Vorzeichen des Imaginärteils des Eigenwerts λ_k . Je nach Vorzeichen gilt $\gamma = 1 \vee \gamma = -1$, was einem positiven bzw. negativen Vorzeichen des Imaginärteils entspricht.

Unter Beachtung der Rücksubstitution $t = \ln \xi$ erhält man schließlich die gesuchte allgemeine Lösung des Eulerschen Differentialgleichungssystems (3.2.9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_h(\xi) &= \left[\Psi^I [\xi^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \xi^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln \xi)] \right. \\ &\quad \left. + \Psi^{II} [\ln(\xi) \xi^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \ln(\xi) \xi^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln \xi)] \right] \mathbf{c}_k \\ &= \mathbf{F}_w(\xi) \mathbf{c}_k. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Die logarithmischen Lösungsanteile in Gl. (3.2.21) resultieren aus der Rücksubstitution. Jeder Eigenwert λ_k und sein zugehöriger Eigenvektor $\boldsymbol{\psi}_k$ können als unabhängiger Deformationsmode angesehen werden. Die Konstanten c_k geben die Gewichtung eines Deformationsmodes an. Sie hängen von den Randbedingungen ab. Für bestimmte Eigenwerte lassen sich die Deformationsmoden anschaulich interpretieren. So treten bei der Platte, sofern keine entsprechende Lagerung sie verhindert, drei Starrkörpermoden auf. Dies sind eine Starrkörperverschiebung zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, sowie zwei Starrkörperrotationen zu den Eigenwerten $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Betrachtet man nun nur die Starrkörperrotationen, so folgt aus der Symmetrie des Eigenwertspektrums, dass zu jeder Starrkörperrotation zwei Eigenwerte mit linear abhängigen Eigenvektoren gehören. Daraus folgt, dass bei den Starrkörperrotationen zusätzlich logarithmische Lösungsanteile der Art $w_{(2,3)}(\xi) = c_{(2,3)} \left(\xi \boldsymbol{\psi}^{(2)} + \xi \ln \xi \boldsymbol{\psi}^{(1)} \right)$ auftreten. Jeder dieser Lösungsanteile beschreibt ein Spannungsfeld, das entsteht, wenn im Skalierungszentrum ein Einzelmoment angreift, das in Richtung der Drehachse der zugehörigen Starrkörperrotation wirkt, vgl. [61, 99].

3.2.3 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Die Verschiebungen aus Gl. (3.2.21) sind die homogenen Lösungen des DGL-Systems (3.2.9). Um die Lösung eines gegebenen Randwertproblems zu ermitteln, müssen noch die Konstanten c_k , die die Gewichtung der einzelnen Deformationsmoden bezüglich äußerer Randbedingungen darstellen, berechnet werden. Mit der homogenen Lösung aus Gl. (3.2.21) ermittelt man zunächst die Verschiebungen und Verdrehungen auf dem Innen- bzw. Außenrand eines zweifach berandeten Gebiets $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_h(\xi_i)$, $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_h(\xi_e)$. Ein durch einen Innenrand ($\xi = \xi_i$) und einen Außenrand ($\xi = \xi_e$) begrenztes Gebiet beschreibt den Skalierungsfall I aus Gl. (3.1.3). Schließlich erhält man folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{N}_w \mathbf{F}_w(\xi_i) \mathbf{c}_k, \\ \phi_i &= - \left(\hat{\mathbf{B}}_3 \mathbf{N}_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_i) + \frac{1}{\xi_i} \hat{\mathbf{B}}_4 \mathbf{N}_{w,\eta} \mathbf{F}_w(\xi_i) \right) \mathbf{c}_k, \\ \mathbf{w}_e &= \mathbf{N}_w \mathbf{F}_w(\xi_e) \mathbf{c}_k, \\ \phi_e &= - \left(\hat{\mathbf{B}}_3 \mathbf{N}_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_e) + \frac{1}{\xi_e} \hat{\mathbf{B}}_4 \mathbf{N}_{w,\eta} \mathbf{F}_w(\xi_e) \right) \mathbf{c}_k. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Führt man als Hilfsgröße die Matrix \mathbf{F}_c mit

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w \mathbf{F}_w(\xi_i) \\ - \left(\hat{\mathbf{B}}_3 \mathbf{N}_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_i) + \frac{1}{\xi_i} \hat{\mathbf{B}}_4 \mathbf{N}_{w,\eta} \mathbf{F}_w(\xi_i) \right) \\ \mathbf{N}_w \mathbf{F}_w(\xi_e) \\ - \left(\hat{\mathbf{B}}_3 \mathbf{N}_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_e) + \frac{1}{\xi_e} \hat{\mathbf{B}}_4 \mathbf{N}_{w,\eta} \mathbf{F}_w(\xi_e) \right) \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

ein, lässt sich die Beziehung aus Gl. (3.2.22) kompakt in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \phi_i \\ \mathbf{w}_e \\ \phi_e \end{bmatrix} = \mathbf{F}_c \mathbf{c}_k. \quad (3.2.24)$$

Diese Gleichungen stellen ein lineares Gleichungssystem dar. Dieses lineare Gleichungssystem wird nun nach den gesuchten Konstanten c_k aufgelöst.

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{F}_c^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \phi_i \\ \mathbf{w}_e \\ \phi_e \end{bmatrix}. \quad (3.2.25)$$

Setzt man die oben formulierten Beziehungen für die unbekannten Konstanten c_k in die Gleichungen (3.2.10) ein, die die Randterme beschreiben, die aus der partiellen Integration bezüglich der Koordinate ξ resultieren, erhält man die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} der Rand-Finite-Elemente-Methode:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{m}_i \\ \mathbf{f}_e \\ \mathbf{m}_e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\xi_i \mathbf{E}_0 & -\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T & \frac{1}{\xi_i} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) & \frac{1}{\xi_i^2} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \\ 0 & \xi_i \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \frac{1}{\xi_i} \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{w,\xi\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{F}_{w,\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{F}_w(\xi_i) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\xi_e \mathbf{E}_0 & -\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T & \frac{1}{\xi_e} (-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) & \frac{1}{\xi_e^2} (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4) \\ 0 & \xi_e \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \frac{1}{\xi_e} \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{w,\xi\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{F}_{w,\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{F}_w(\xi_e) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{F}_c^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \phi_i \\ \mathbf{w}_e \\ \phi_e \end{bmatrix}. \quad (3.2.26)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} koppelt die Verschiebungen mit den Lasten auf dem Rand. Dies sind die Kräfte $\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_e$ sowie die Momente $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_e$. Kinematische Randbedingungen werden in der SBFEM auf die gleiche Art und Weise in die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} implementiert

wie in der Finite-Elemente-Methode. Nachdem diese eingebaut sind und somit Starrkörperverschiebungen verhindert werden, kann das lineare Gleichungssystem (3.2.26) gelöst werden. Sind die Verschiebungen auf den Rändern bekannt, lassen sich mit den Beziehungen aus Gl. (3.2.25) die Konstanten c_k berechnen. Damit kann die Lösung für das gesamte Randwertproblem entwickelt werden.

3.2.4 Verschiebungsrandbedingungen auf den Seitenflächen

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie geometrische Randbedingungen auf den nicht diskretisierten Seitenrändern implementiert werden. Als Seitenflächen werden die Ränder bezeichnet, die das zu untersuchende Gebiet begrenzen und mit einer gedachten geraden Linie zusammenfallen, die vom Skalierungszentrum ausgeht. Seitenflächen können dabei nur

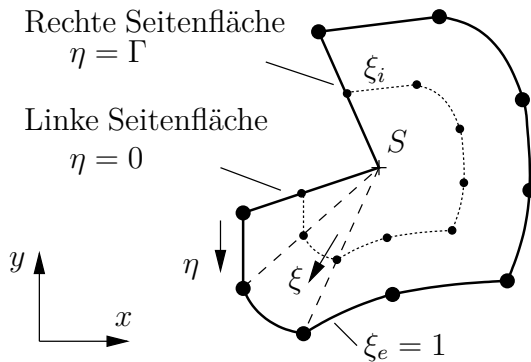


Abb. 3.3: Seitenflächen

bei Platten mit offener Geometrie, siehe Abb. 3.3, auftreten. Dies können z. B. Trapezplatten, Dreiecksplatten oder auch Platten in Form eines Kreissektors sein. Entlang dieser Seitenflächen, die gleichzeitig auch Elementgrenzen bilden, können Randbedingungen äußerst genau dargestellt werden, da die Verschiebungen an den nicht diskretisierten Seitenrändern in analytischer Form vorliegen. Wolf und Song beschreiben in ihrer Arbeit [96, 111] wie Spannungsrand-

bedingungen auf den Seitenrändern implementiert werden. Dabei gehen sie vom longitudinalen Schubspannungszustand aus und berücksichtigen nur Spannungen, die sich als Potenzreihe darstellen lassen. Neben Spannungsrandbedingungen implementieren sie auch geometrische Randbedingungen, wobei sie die Verschiebungen aber immer zu null setzen. Eine ausführliche Darstellung der Implementierung von geometrischen Randbedingungen auf den Seitenrändern für Scheibenprobleme findet sich bei Deeks [29]. In dieser Arbeit wird die Implementierung geometrischer Randbedingungen für Plattenprobleme vorgestellt, wobei sich die Vorgehensweise an Deeks [29] anlehnt. Dazu ist es zweckmäßig, die Lösungen $\mathbf{w}(\xi)$ in zwei Teile aufzuspalten. In n_u freie Lösungen $\mathbf{w}_u(\xi)$ und n_c vorgegebene Lösungen $\mathbf{w}_c(\xi)$. Da auf jedem Seitenrand zwei unbekannte Funktionen, die Verschiebung $w(\xi)$ und die Neigung $\partial w / \partial \eta(\xi)$, vorkommen, können maximal vier Terme vorgeschrieben werden. Die Differentialgleichungen aus Gl. (3.2.27) lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0uu} & \mathbf{E}_{0uc} \\ \mathbf{E}_{0cu} & \mathbf{E}_{0cc} \end{bmatrix} \xi^4 \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{u,\xi\xi\xi} \\ \mathbf{w}_{c,\xi\xi\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{E}_{0uu} + \mathbf{E}_{1uu} - \mathbf{E}_{1uu}^T & 2\mathbf{E}_{0uc} + \mathbf{E}_{1uc} - \mathbf{E}_{1uc}^T \\ 2\mathbf{E}_{0cu} + \mathbf{E}_{1cu} - \mathbf{E}_{1cu}^T & 2\mathbf{E}_{0cc} + \mathbf{E}_{1cc} - \mathbf{E}_{1cc}^T \end{bmatrix} \xi^3 \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{u,\xi\xi\xi} \\ \mathbf{w}_{c,\xi\xi\xi} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{2uu} + \mathbf{E}_{2uu}^T - \mathbf{E}_{3uu} & \mathbf{E}_{2uc} + \mathbf{E}_{2uc}^T - \mathbf{E}_{3uc} \\ \mathbf{E}_{2cu} + \mathbf{E}_{2cu}^T - \mathbf{E}_{3cu} & \mathbf{E}_{2cc} + \mathbf{E}_{2cc}^T - \mathbf{E}_{3cc} \end{bmatrix} \xi^3 \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{u,\xi\xi} \\ \mathbf{w}_{c,\xi\xi} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -2\mathbf{E}_{2uu} + \mathbf{E}_{3uu} - \mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{4uu}^T & -2\mathbf{E}_{2uc} + \mathbf{E}_{3uc} - \mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{4uc}^T \\ -2\mathbf{E}_{2cu} + \mathbf{E}_{3cu} - \mathbf{E}_{4cu} + \mathbf{E}_{4cu}^T & -2\mathbf{E}_{2cc} + \mathbf{E}_{3cc} - \mathbf{E}_{4cc} + \mathbf{E}_{4cc}^T \end{bmatrix} \xi^3 \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{u,\xi} \\ \mathbf{w}_{c,\xi} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 2\mathbf{E}_{2uu} + 2\mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{5uu} & 2\mathbf{E}_{2uc} + 2\mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{5uc} \\ 2\mathbf{E}_{2cu} + 2\mathbf{E}_{4cu} + \mathbf{E}_{5cu} & 2\mathbf{E}_{2cc} + 2\mathbf{E}_{4cc} + \mathbf{E}_{5cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_u \\ \mathbf{w}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nur die ersten n_u Zeilen dieses DGL-Systems und bringt die bekannten Terme aus dieser Gleichung auf die rechte Seite, erhält man ein System inhomogener Differentialgleichungen vom Euler-Typ zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen $\mathbf{w}_u(\xi)$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{0uu} \xi^4 \mathbf{w}_{u,\xi\xi\xi} + (2\mathbf{E}_{0uu} + \mathbf{E}_{1uu} - \mathbf{E}_{1uu}^T) \xi^3 \mathbf{w}_{u,\xi\xi} + (\mathbf{E}_{2uu} + \mathbf{E}_{2uu}^T - \mathbf{E}_{3uu}) \xi^2 \mathbf{w}_{u,\xi} \\
& + (-2\mathbf{E}_{2uu} + \mathbf{E}_{3uu} - \mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{4uu}^T) \xi \mathbf{w}_{u,\xi} + (2\mathbf{E}_{2uu} + 2\mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{5uu}) \mathbf{w}_u \\
& = -\mathbf{E}_{0uc} \xi^4 \mathbf{w}_{c,\xi\xi\xi} - (2\mathbf{E}_{0uc} + \mathbf{E}_{1uc} - \mathbf{E}_{1uc}^T) \xi^3 \mathbf{w}_{c,\xi\xi} - (\mathbf{E}_{2uc} + \mathbf{E}_{2uc}^T - \mathbf{E}_{3uc}) \xi^2 \mathbf{w}_{c,\xi} \\
& - (-2\mathbf{E}_{2uc} + \mathbf{E}_{3uc} - \mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{4uc}^T) \xi \mathbf{w}_{c,\xi} - (2\mathbf{E}_{2uc} + 2\mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{5uc}) \mathbf{w}_c. \tag{3.2.28}
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses DGL-Systems setzt sich aus der homogenen Lösung $\mathbf{w}_h(\xi)$ und einer Partikulärlösung $\mathbf{w}_p(\xi)$ zusammen. Die homogene Lösung erhält man über das zugehörige Eigenwertproblem wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben. Die Symmetrie des Eigenwertspektrums bleibt erhalten, allerdings kann durch Vorgabe entsprechender Randbedingungen das Auftreten von Starrkörperverschiebungen verhindert werden. Wird zum Beispiel eine Seitenfläche der Platte eingespannt ($w_c(\xi) = 0$, $\frac{\partial w_c}{\partial \eta} = 0$) kann weder eine Starrkörperverschiebung noch eine Starrkörperverdrehung auftreten. Wird eine Seitenfläche gelenkig gelagert ($w_c = 0$), tritt eine Starrkörperverdrehung entlang dieses Rands auf, allerdings werden Starrkörperverschiebungen der Platte verhindert. Sind die vorgeschriebenen Verschiebungen auf den Seitenrändern null ($w_c = \frac{\partial w_c}{\partial \eta} = 0$), z. B. bei gelenkig gelagerten oder eingespannten Seitenflächen, wird die rechte Seite des DGL-Systems (3.2.28) null und die Lösung reduziert sich auf das Auffinden einer homogenen Lösung. Sind die vorgegebenen

Verschiebungen von null verschieden und lassen sich als Potenzreihe darstellen

$$\mathbf{w}_c(\xi) = \sum_{i=1}^{n_p} \xi^{p_i} \boldsymbol{\psi}_{cp_i}, \quad (3.2.29)$$

wählt man einen Ansatz vom Typ der rechten Seite, um die partikuläre Lösung zu finden. Zu jedem Term aus Gl. (3.2.29) gehört dabei eine Lösung der Form

$$\mathbf{w}_{up_i}(\xi) = \xi^{p_i} \boldsymbol{\psi}_{up_i}. \quad (3.2.30)$$

Um die unbekannten Deformationsmoden $\boldsymbol{\psi}_{up_i}$ zu bestimmen, setzt man nacheinander jeden Term aus Gl. (3.2.29) in die inhomogenen Differentialgleichungen ein und löst nach den Deformationsmoden $\boldsymbol{\psi}_{up_i}$ auf.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{up_i} = & \left[p_i^4 \mathbf{E}_{0uu} + p_i^3 \left(-4\mathbf{E}_{0uu} + \mathbf{E}_{1uu} - \mathbf{E}_{1uu}^T \right) \right. \\ & + p_i^2 \left(5\mathbf{E}_{0uu} - 3\mathbf{E}_{1uu} + 3\mathbf{E}_{1uu}^T + \mathbf{E}_{2uu} + \mathbf{E}_{2uu}^T - \mathbf{E}_{3uu} \right) \\ & + p_i \left(-2\mathbf{E}_{0uu} + 2\mathbf{E}_{1uu} - 2\mathbf{E}_{1uu}^T - 3\mathbf{E}_{2uu} - \mathbf{E}_{2uu}^T + 2\mathbf{E}_{3uu} - \mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{4uu}^T \right) \\ & \left. + (2\mathbf{E}_{2uu} + 2\mathbf{E}_{4uu} + \mathbf{E}_{5uu}) \right]^{-1} \left[p_i^4 \mathbf{E}_{0uc} + p_i^3 \left(-4\mathbf{E}_{0uc} + \mathbf{E}_{1uc} - \mathbf{E}_{1uc}^T \right) \right. \\ & + p_i^2 \left(5\mathbf{E}_{0uc} - 3\mathbf{E}_{1uc} + 3\mathbf{E}_{1uc}^T + \mathbf{E}_{2uc} + \mathbf{E}_{2uc}^T - \mathbf{E}_{3uc} \right) \\ & + p_i \left(-2\mathbf{E}_{0uc} + 2\mathbf{E}_{1uc} - 2\mathbf{E}_{1uc}^T - 3\mathbf{E}_{2uc} - \mathbf{E}_{2uc}^T + 2\mathbf{E}_{3uc} - \mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{4uc}^T \right) \\ & \left. + (2\mathbf{E}_{2uc} + 2\mathbf{E}_{4uc} + \mathbf{E}_{5uc}) \right]. \quad (3.2.31) \end{aligned}$$

Die unbekannten Verschiebungen lassen sich dann folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_u(\xi) \\ \mathbf{w}_c(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_u} c_i \xi^{\lambda_i} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{up_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_{p_i}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{up_i} \\ \boldsymbol{\psi}_{cp_i} \end{bmatrix}. \quad (3.2.32)$$

Die Wichtungskonstanten \mathbf{c}_i der einzelnen Deformationsmoden hängen von den Randbedingungen entlang der diskretisierten Ränder ab. Die Verschiebungen aus Gl. (3.2.32) werden auf den Rändern ausgewertet und nach den unbekannten Konstanten \mathbf{c}_i aufgelöst. Anschließend substituiert man diese Gleichungen in die Randterme aus Gl. (3.2.10), die man zuvor analog zu den Differentialgleichungen in n_u freie und n_c vorgegebene Terme zerlegen muss. Dadurch erhält man die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , wie in Kapitel 3.1.3 beschrieben. Mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} lassen sich die Verschiebungen entlang der diskretisierten Ränder berechnen. Aus ihnen kann man abschließend die Konstanten \mathbf{c}_i bestimmen, womit die Lösung nach Gl. (3.2.32) entwickelt werden kann.

3.3 Das Laminelement in der RFEM

3.3.1 Variationsprinzip / Herleitung der Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wird die Herleitung eines Laminelements mit beliebigem Lagenaufbau in der Rand-Finite-Elemente-Methode vorgestellt. Dabei werden wir uns auf dünne Lamine beschränken. Dünne Lamine werden als schubstarr angesehen, transversale Schubdeformationen werden somit vernachlässigt. Es gelten die kinematischen Annahmen der klassischen Laminattheorie, siehe Kapitel 2.3. Vernachlässigt man Volumenkräfte und hygrothermische Problemstellungen, lässt sich mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die folgende Gleichgewichtsbedingung ableiten:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\mathcal{L}\delta\mathbf{u}_0)^T \mathbf{D}_A \mathcal{L}\mathbf{u}_0 - (\mathcal{L}\delta\mathbf{u}_0)^T \mathbf{D}_B \mathcal{L}\nabla w - (\mathcal{L}\nabla w)^T \mathbf{D}_B \mathcal{L}\mathbf{u}_0 + (\mathcal{L}\nabla w)^T \mathbf{D}_D \mathcal{L}\nabla w] d\Omega \\ = \int_{\Gamma_1} \delta u_n n_n d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \delta u_t n_t d\Gamma - \int_{\Gamma_3} \delta w_{,n} m_n d\Gamma - \int_{\Gamma_4} \delta w_{,t} m_t d\Gamma + \int_{\Gamma_5} \delta w f d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Bei ∇ handelt es sich um den Nabla-Operator. Mit dem Differentialoperator \mathcal{L} werden die Verzerrungen und Verschiebungen in Relation zueinander gesetzt, vgl. Kapitel 3.1.4. Die Verschiebungen des Laminats setzen sich zusammen aus den In-plane-Verschiebungen der Laminatmittelfläche \mathbf{u}_0 sowie der Out-of-plane-Verschiebung w in Dickenrichtung z . Die Steifigkeitsmatrizen \mathbf{D}_A , \mathbf{D}_B und \mathbf{D}_D beschreiben Scheibensteifigkeiten, Kopplungssteifigkeiten und Plattensteifigkeiten. Die tiefgestellten Indizes A , B und D sind dabei an die Bezeichnungen aus Gl. (2.3.17) der klassischen Laminattheorie angelehnt. Bei n , m und f handelt es sich um Schnittkräfte, Schnittmomente und Querkräfte entlang des Rands. Dabei kennzeichnet der tiefgestellte Index n Größen normal zum Rand, t beschreibt Größen tangential zum Rand. Das Gleichgewicht aus virtuellem innerem Potential und virtueller äußerer Arbeit wird nun wieder in den skalierten Randkoordinaten η und ξ ausgedrückt. Dazu diskretisiert man den Rand des Laminats und wählt zur Approximation der Verschiebungen einen Produktansatz aus Formfunktionen $\mathbf{N}_u(\eta)$ bzw. $\mathbf{N}_w(\eta)$ und unbekannten Funktionen $u_h(\xi)$, $v_h(\xi)$ und $w(\xi)$.

$$\mathbf{u}_0(\xi, \eta) = \mathbf{N}_u(\eta) \mathbf{u}_h(\xi), \quad w(\xi, \eta) = \mathbf{N}_w(\eta) w_h(\xi). \quad (3.3.2)$$

Zur Approximation der Inplane-Verschiebungen \mathbf{u}_0 wird ein isoparametrischer Ansatz gewählt, da die Formfunktionen $\mathbf{N}_u(\eta)$ nur C_0 -Stetigkeitsanforderungen genügen müssen. Für die Formfunktionen $\mathbf{N}_w(\eta)$ zur Beschreibung der Out-of-plane-Verschiebung w werden wie bei der Platte, siehe Gl. (3.1.7), Hermitesche Polynome 3. Ordnung verwendet. Die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}_0$ und δw werden auf die gleiche Art approximiert. Damit

folgt für die innere virtuelle Arbeit δW_i in skalierten Rand-Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & \int_0^\Gamma \int_{\xi_i}^{\xi_e} \left[\left(\mathbf{B}_1 \delta \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \delta \mathbf{u}_h \right)^T \mathbf{D}_A \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_h \right) \right. \\
& - \left(\mathbf{B}_1 \delta \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \delta \mathbf{u}_h \right)^T \mathbf{D}_B \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{B}_5 \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_6 \mathbf{w}_h + \mathbf{B}_7 \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_8 \mathbf{w}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_9 \mathbf{w}_{h,\xi} \right) \\
& - \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{B}_5 \delta \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_6 \delta \mathbf{w}_h + \mathbf{B}_7 \delta \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_8 \delta \mathbf{w}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_9 \delta \mathbf{w}_{h,\xi} \right)^T \mathbf{D}_B \\
& \quad \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_h \right) \\
& + \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{B}_5 \delta \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_6 \delta \mathbf{w}_h + \mathbf{B}_7 \delta \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_8 \delta \mathbf{w}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_9 \delta \mathbf{w}_{h,\xi} \right)^T \mathbf{D}_D \\
& \quad \left. \left(\frac{1}{\xi} \mathbf{B}_5 \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_6 \mathbf{w}_h + \mathbf{B}_7 \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{B}_8 \mathbf{w}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_9 \mathbf{w}_{h,\xi} \right) \right] \xi \det \mathbf{J}^* d\eta d\xi .
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{N}_u, & \mathbf{B}_2 &= \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{N}_{u,\eta}, & \mathbf{B}_5 &= \hat{\mathbf{B}}_5 \mathbf{N}_w, & \mathbf{B}_6 &= \hat{\mathbf{B}}_6 \mathbf{N}_{w,\eta}, \\
\mathbf{B}_7 &= \hat{\mathbf{B}}_7 \mathbf{N}_w, & \mathbf{B}_8 &= \hat{\mathbf{B}}_8 \mathbf{N}_{w,\eta\eta}, & \mathbf{B}_9 &= \hat{\mathbf{B}}_9 \mathbf{N}_{w,\eta}.
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Analog zur Platte integriert man nun numerisch entlang des diskretisierten Rands. Die Integrationen werden dabei elementweise mittels Gauß-Quadratur durchgeführt. Anschließend werden die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Ai} , \mathbf{E}_{Bi} und \mathbf{E}_{Di} aufgebaut. Diese Assemblierung läuft analog zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix in der Finite-Elemente-Methode. Der Index A kennzeichnet dabei Randsteifigkeitsmatrizen, die reines Scheibenverhalten beschreiben, B steht für Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten, während reines Plattenverhalten durch den Index D gekennzeichnet wird. Die Randsteifigkeitsmatrizen sind im Folgenden definiert, wobei zuerst die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Ai} aufgeführt werden, die die Scheibensteifigkeiten repräsentieren:

$$\mathbf{E}_{A0} = \int_0^\Gamma \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_A \mathbf{B}_1 \det \mathbf{J}^* d\eta, \quad \mathbf{E}_{A1} = \int_0^\Gamma \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_A \mathbf{B}_2 \det \mathbf{J}^* d\eta, \quad \mathbf{E}_{A2} = \int_0^\Gamma \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_A \mathbf{B}_2 \det \mathbf{J}^* d\eta. \tag{3.3.5}$$

Die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Bi} , die die Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten wiedergeben, folgen analog zu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{B0} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_B \mathbf{B}_7 \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{B3} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_B \mathbf{B}_7 \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
\mathbf{E}_{B1} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_B (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{B4} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_B (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9) \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
\mathbf{E}_{B2} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_B (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{B5} &= - \int_0^\Gamma \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_B (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8) \det \mathbf{J}^* d\eta.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Schließlich folgen die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Di} , die das Plattenverhalten beschreiben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{D0} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_7^T \mathbf{D}_D \mathbf{B}_7 \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D3} &= \int_0^\Gamma (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9)^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9) \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
\mathbf{E}_{D1} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_7^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D4} &= \int_0^\Gamma (\mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_9)^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8) \det \mathbf{J}^* d\eta, \\
\mathbf{E}_{D2} &= \int_0^\Gamma \mathbf{B}_7^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8) \det \mathbf{J}^* d\eta, & \mathbf{E}_{D5} &= \int_0^\Gamma (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8)^T \mathbf{D}_D (\mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_8) \det \mathbf{J}^* d\eta.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Nach der Integration entlang des Rands lässt sich nun die innere virtuelle Arbeit mit den Randsteifigkeitsmatrizen folgendermaßen darstellen, wobei δW_i nach den partiellen Ableitungen der Funktionen $\delta \mathbf{u}_{h,\xi}^T$ bzw. $\delta \mathbf{w}_{h,\xi}^T$ bezüglich ξ sortiert wird:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= \int_{\xi_i}^{\xi_e} \left(\delta \mathbf{u}_{h,\xi}^T \left[\mathbf{E}_{A0} \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{A1} \mathbf{u}_h + \mathbf{E}_{B0} \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{B1} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{B2} \mathbf{w}_h \right] \right. \\
&\quad + \delta \mathbf{u}_h^T \left[\mathbf{E}_{A1}^T \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{A2} \mathbf{u}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{B3} \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{B4} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{B5} \mathbf{w}_h \right] \\
&\quad + \delta \mathbf{w}_{h,\xi\xi}^T \left[\mathbf{E}_{B0}^T \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{B3}^T \mathbf{u}_h + \mathbf{E}_{D0} \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{D1} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D2} \mathbf{w}_h \right] \\
&\quad + \delta \mathbf{w}_{h,\xi}^T \left[\frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{B1}^T \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{B4}^T \mathbf{u}_h + \frac{1}{\xi} \mathbf{E}_{D1}^T \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D3} \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{D4} \mathbf{w}_h \right] \\
&\quad \left. + \delta \mathbf{w}_h^T \left[\frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{B2}^T \mathbf{u}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{B5}^T \mathbf{u}_h + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{E}_{D2}^T \mathbf{w}_{h,\xi\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{E}_{D4}^T \mathbf{w}_{h,\xi} + \frac{1}{\xi^4} \mathbf{E}_{D5} \mathbf{w}_h \right] \xi d\xi \right).
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Die einzelnen Terme aus Gl. (3.3.8) integriert man nun bis zu zweimal partiell bezüglich der Skalierungskoordinate ξ . Die äußere virtuelle Arbeit δW_a wird ebenfalls in skalierten Randkoordinaten dargestellt, man erhält schließlich:

$$\begin{aligned}
\delta W_a &= \delta \mathbf{u}_h^T(\xi_e) \mathbf{n}(\xi_e) + \delta \mathbf{u}_h^T(\xi_i) \mathbf{n}(\xi_i) + \delta \mathbf{w}^T(\xi_e) \mathbf{f}(\xi_e) + \delta \mathbf{w}^T(\xi_i) \mathbf{f}(\xi_i) \\
&\quad + \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi_e) \mathbf{m}(\xi_e) + \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi_i) \mathbf{m}(\xi_i).
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

An den Knoten folgen daraus die Komponenten:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_n \\ n_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = [f_z] \quad \text{und} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_n \\ m_t \end{bmatrix}. \quad (3.3.10)$$

Damit für beliebige virtuelle Verrückungen $\delta \mathbf{u}_h$ und $\delta \mathbf{w}_h^T$ Gleichgewicht zwischen der inneren virtuellen Arbeit δW_i und der äußeren virtuellen Arbeit δW_a herrscht, muss analog zur Vorgehensweise bei der Platte der Integrand der inneren virtuellen Arbeit δW_i verschwinden. Daraus resultiert ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 4. Ordnung:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{E}_{A0} & -\mathbf{E}_{A0} - \mathbf{E}_{A1} + \mathbf{E}_{A1}^T & \mathbf{E}_{A2} \\ \mathbf{E}_{B0}^T & 2\mathbf{E}_{B0}^T - \mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B3}^T & \mathbf{E}_{B2}^T - \mathbf{E}_{B4}^T & \mathbf{E}_{B4}^T + \mathbf{E}_{B5}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^4 \mathbf{u}_{h,\xi\xi\xi} \\ \xi^3 \mathbf{u}_{h,\xi\xi} \\ \xi^2 \mathbf{u}_{h,\xi} \\ \xi \mathbf{u}_h \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{E}_{B0} & -\mathbf{E}_{B0} - \mathbf{E}_{B1} + \mathbf{E}_{B3} \\ \mathbf{E}_{D0} & 2\mathbf{E}_{D0} + \mathbf{E}_{D1} - \mathbf{E}_{D1}^T & \mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D2}^T - \mathbf{E}_{D3} \\ & \mathbf{E}_{B4} - \mathbf{E}_{B2} & \mathbf{E}_{B2} + \mathbf{E}_{B5} \\ & -2\mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D3} - \mathbf{E}_{D4} + \mathbf{E}_{D4}^T & 2\mathbf{E}_{D2} + 2\mathbf{E}_{D4} + \mathbf{E}_{D5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^4 \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi} \\ \xi^3 \mathbf{w}_{h,\xi\xi} \\ \xi^2 \mathbf{w}_{h,\xi} \\ \xi \mathbf{w}_{h,\xi} \\ \mathbf{w}_h \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Diese Differentialgleichungen sind wiederum vom Euler-Cauchy-Typ und damit analytisch lösbar. Neben den Differentialgleichungen erhält man aus der partiellen Integration bezüglich ξ Terme, die auf den Rändern ausgewertet werden müssen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{A0}\xi_e & \mathbf{E}_{A1} \\ -\mathbf{E}_{B0}^T\xi_e & -(\mathbf{E}_{B0}^T - \mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B3}^T) & \mathbf{E}_{B4}^T\frac{1}{\xi_e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}^T\xi_e & \mathbf{E}_{B3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{h,\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{u}_{h,\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{u}_h(\xi_e) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}\xi_e & \mathbf{E}_{B1} & \mathbf{E}_{B2}\frac{1}{\xi_e} \\ -\mathbf{E}_{D0}\xi_e & -\mathbf{E}_{D0} - \mathbf{E}_{D1} + \mathbf{E}_{D1}^T & (\mathbf{E}_{D3} - \mathbf{E}_{D2})\frac{1}{\xi_e} & (\mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D4})\frac{1}{\xi_e^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{D0}\xi_e & \mathbf{E}_{D1} & \mathbf{E}_{D2}\frac{1}{\xi_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi_e) \\ \mathbf{w}_h(\xi_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(\xi_e) \\ \mathbf{f}(\xi_e) \\ \mathbf{m}(\xi_e) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{A0}\xi_i & \mathbf{E}_{A1} \\ -\mathbf{E}_{B0}^T\xi_i & -(\mathbf{E}_{B0}^T - \mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B3}^T) & \mathbf{E}_{B4}^T\frac{1}{\xi_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}^T\xi_i & \mathbf{E}_{B3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{h,\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{u}_{h,\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{u}_h(\xi_i) \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}\xi_i & \mathbf{E}_{B1} & \mathbf{E}_{B2}\frac{1}{\xi_i} \\ -\mathbf{E}_{D0}\xi_i & -\mathbf{E}_{D0} - \mathbf{E}_{D1} + \mathbf{E}_{D1}^T & (\mathbf{E}_{D3} - \mathbf{E}_{D2})\frac{1}{\xi_i} & (\mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D4})\frac{1}{\xi_i^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{D0}\xi_i & \mathbf{E}_{D1} & \mathbf{E}_{D2}\frac{1}{\xi_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{h,\xi\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_{h,\xi\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_{h,\xi}(\xi_i) \\ \mathbf{w}_h(\xi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(\xi_i) \\ \mathbf{f}(\xi_i) \\ \mathbf{m}(\xi_i) \end{bmatrix}. \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

Damit Gleichgewicht herrscht, müssen die Terme, die auf den Rändern ausgewertet werden, im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften und Momenten stehen. Im weiteren Verlauf der Lösung wird aus ihnen zusammen mit der homogenen Lösung des Differentialgleichungssystems die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Laminats gebildet.

3.3.2 Homogene Lösung des DGL-Systems des Laminats

Homogene Lösungen der Eulerschen Differentialgleichungen lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h(\xi) &= c_1 \lambda_1 \xi^{\lambda_1-1} \boldsymbol{\psi}_{u1} + c_2 \lambda_2 \xi^{\lambda_2-1} \boldsymbol{\psi}_{u2} + \dots + c_n \lambda_n \xi^{\lambda_n-1} \boldsymbol{\psi}_{un}, \\
\mathbf{w}_h(\xi) &= c_1 \xi^{\lambda_1} \boldsymbol{\psi}_{w1} + c_2 \xi^{\lambda_2} \boldsymbol{\psi}_{w2} + \dots + c_n \xi^{\lambda_n} \boldsymbol{\psi}_{wn}. \tag{3.3.13}
\end{aligned}$$

Nach Mehrmann [64] ist das Eigenwertspektrum des Eigenwertproblems, das aus den Differentialgleichungen der Scheibe resultiert, symmetrisch zu null, da die Koeffizientenmatrizen der Scheibendifferentialgleichung abwechselnd symmetrisch und schiefsymmetrisch sind, siehe auch Artel [4]. Wie in Kapitel 3.2.2 gezeigt wird, ist das Eigenwertspektrum der Platte symmetrisch zu $\lambda = 1$. Um den unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften von Scheibe und Platte Rechnung zu tragen, wählt man zur Lösung folgende Ansätze:

$$\mathbf{u}_h = \lambda \xi^{\lambda-1} \boldsymbol{\psi}_u, \quad \mathbf{w}_h = \xi^\lambda \boldsymbol{\psi}_w. \tag{3.3.14}$$

Substituiert man diese in Gl. (3.3.11), resultiert ein Eigenwertproblem 4. Ordnung.

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_{w4} \\ \mathbf{B}_{u4} & \mathbf{D}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_4} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ \boldsymbol{\psi}_w \end{bmatrix} + \lambda^3 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_{w3} \\ \mathbf{B}_{u3} & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_3} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ \boldsymbol{\psi}_w \end{bmatrix} + \lambda^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_{w2} \\ \mathbf{B}_{u2} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ \boldsymbol{\psi}_w \end{bmatrix} \\
& + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_{w1} \\ \mathbf{B}_{u1} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ \boldsymbol{\psi}_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_0} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ \boldsymbol{\psi}_w \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{3.3.15}
\end{aligned}$$

Die Einträge \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_{wi} , \mathbf{B}_{ui} und \mathbf{B}_{wi} der Koeffizientenmatrizen \mathbf{H}_i des Eigenwertproblems können durch die Randsteifigkeitsmatrizen aus den Gleichungen (3.3.5) bis (3.3.7) dargestellt werden. Der Scheibenquadrant wird durch die folgenden Matrizen \mathbf{A}_i beschrieben:

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{E}_{A0} + \mathbf{E}_{A1} - \mathbf{E}_{A1}^T + \mathbf{E}_{A2}, \quad \mathbf{A}_2 = 2\mathbf{E}_{A0} - \mathbf{E}_{A1} + \mathbf{E}_{A1}^T, \quad \mathbf{A}_3 = -\mathbf{E}_{A0}. \quad (3.3.16)$$

Die Kopplungsterme zwischen Scheiben- und Platten-DGL sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{u1} &= -2\mathbf{E}_{B0}^T - 2\mathbf{E}_{B1}^T - \mathbf{E}_{B2}^T + 2\mathbf{E}_{B3}^T + 2\mathbf{E}_{B4}^T + \mathbf{E}_{B5}^T, & \mathbf{B}_{u3} &= -4\mathbf{E}_{B0}^T - \mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B3}^T, \\ \mathbf{B}_{u2} &= 5\mathbf{E}_{B0}^T + 3\mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B2}^T - 3\mathbf{E}_{B3}^T - \mathbf{E}_{B4}^T, & \mathbf{B}_{u4} &= \mathbf{E}_{B0}^T, \\ \mathbf{B}_{w0} &= \mathbf{E}_{B2} + \mathbf{E}_{B5}, & \mathbf{B}_{w2} &= 2\mathbf{E}_{B0} - \mathbf{E}_{B1} + \mathbf{E}_{B3}, \\ \mathbf{B}_{w1} &= -\mathbf{E}_{B0} + \mathbf{E}_{B1} - \mathbf{E}_{B2} - \mathbf{E}_{B3} + \mathbf{E}_{B4}, & \mathbf{B}_{w3} &= -\mathbf{E}_{B0}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Der Plattenquadrant wird von den Matrizen \mathbf{D}_i beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 &= 2\mathbf{E}_{D2} + 2\mathbf{E}_{D4} + \mathbf{E}_{D5}, \\ \mathbf{D}_1 &= -2\mathbf{E}_{D0} + 2\mathbf{E}_{D1} - 2\mathbf{E}_{D1}^T - 3\mathbf{E}_{D2} - \mathbf{E}_{D2}^T + 2\mathbf{E}_{D3} - \mathbf{E}_{D4} + \mathbf{E}_{D4}^T, \\ \mathbf{D}_2 &= 5\mathbf{E}_{D0} - 3\mathbf{E}_{D1} + 3\mathbf{E}_{D1}^T + \mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D2}^T - \mathbf{E}_{D3}, \\ \mathbf{D}_3 &= -4\mathbf{E}_{D0} + \mathbf{E}_{D1} - \mathbf{E}_{D1}^T, \\ \mathbf{D}_4 &= \mathbf{E}_{D0}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Formt man aus den Eigenvektoren des Scheiben- und des Plattenproblems einen Vektor der Art $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_u, \boldsymbol{\psi}_w]^T$ lässt sich das Eigenwertproblem 4. Ordnung aus Gl. (3.3.15) als ein verallgemeinertes Eigenwertproblem 1. Ordnung schreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^3 \boldsymbol{\psi} \\ \lambda^2 \boldsymbol{\psi} \\ \lambda \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^3 \boldsymbol{\psi} \\ \lambda^2 \boldsymbol{\psi} \\ \lambda \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}}. \quad (3.3.19)$$

Durch die Wahl der Lösungsansätze ist sichergestellt, dass das Eigenwertspektrum des gekoppelten Scheiben- und Plattenproblems symmetrisch zur Eins ist. Das Scheibenproblem wird durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben. Bei einer Diskretisierung mit n Knoten resultieren daraus $2n * 2$ unabhängige Deformationsmoden, da an jedem Knoten zur Beschreibung des Inplane-Verhaltens zwei unbekannte Funktionen angenommen werden. Aus dem Plattenproblem resultieren $4n * 2$ unabhängige Deformationsmoden. Somit treten beim Laminat insgesamt $12n$ verschiedene Deformationsmoden auf. Wie bei der Platte, gibt es auch beim Laminat Eigenwerte, bei denen die algebraische Vielfachheit nicht mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Analog zur Platte, müssen

dann auch beim Laminat Hauptvektoren über die Folge aus Gl. (3.2.17) berechnet werden. Auch bei Laminat bricht in der Regel diese Folge nach der zweiten Zeile ab, so dass nur Hauptvektoren 2. Ordnung auftreten. Bei bestimmten Deformationsmoden treten logarithmische Lösungen immer auf. So tritt in Verbindung mit jeder Starrkörperrotation der Platte ein Deformationsmode mit logarithmischen Anteilen auf. Dieser logarithmische Deformationsmode beschreibt Verschiebungen, die durch ein Einzelmoment, das im Skalierungszentrum um die Drehachse angreift, hervorgerufen werden. Außerdem gehören zu jeder Starrkörperverschiebung der Scheibe logarithmische Lösungsanteile. Diese Lösungen beschreiben Verschiebungen, die durch Einzelkräfte, die im Skalierungszentrum in Richtung der Starrkörperverschiebung wirken, entstehen. Daneben können logarithmische Lösungen auf Grund von Randbedingungen auf den Seitenrändern, geometrischen Diskontinuitäten auf den Rändern und durch spezielle Materialkonfigurationen hervorgerufen werden [82, 83]. Die Lösungen des DGL-Systems zur Beschreibung des Laminats lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \Phi_u \mathbf{F}_u(\xi) \mathbf{c}_k \\ &= \left[\Psi_{u1} [\xi^{\alpha_k-1} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \xi^{\alpha_k-1} \sin(\beta_k \ln \xi)] + \right. \\ &\quad \left. \Psi_{u2} [\ln(\xi) \xi^{\alpha_k-1} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \ln(\xi) \xi^{\alpha_k-1} \sin(\beta_k \ln \xi)] \right] \mathbf{c}_k, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_h &= \Phi_w \mathbf{F}_w(\xi) \mathbf{c}_k \\ &= [\Psi_{w1} [\xi^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \xi^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln \xi)] + \\ &\quad \Psi_{w2} [\ln(\xi) \xi^{\alpha_k} \cos(\beta_k \ln \xi) + \gamma \ln(\xi) \xi^{\alpha_k} \sin(\beta_k \ln \xi)]] \mathbf{c}_k. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Darin beschreiben α_k Realteile, β_k Imaginärteile konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$. Bei einem negativen Imaginärteil gilt $\gamma = -1$, für einen positiven $\gamma = 1$. In den Matrizen Ψ_{u1} und Ψ_{w1} sind die Eigenvektoren und Hauptvektoren 2. Stufe des Scheiben- bzw. des Plattenproblems zusammengefasst. Treten logarithmische Moden auf, sind in Ψ_{u1} und Ψ_{w1} die Hauptvektoren enthalten und in Ψ_{u2} und Ψ_{w2} die zu diesen gehörenden Eigenvektoren. Um ein Randwertproblem vollständig erfassen zu können, müssen noch die unbekannten Konstanten \mathbf{c}_k , mit denen die einzelnen Deformationsmoden gewichtet werden, bestimmt werden. Dazu muss die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aufgestellt werden.

3.3.3 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Laminats

Um die unbekannten Konstanten \mathbf{c}_k zu bestimmen, werden die Verschiebungen aus den Gleichungen (3.3.20) und (3.3.21) auf den Rändern bei $\xi = \xi_i$ und $\xi = \xi_e$ ausgewertet und anschließend nach den unbekannten Gewichtskonstanten aufgelöst:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^* \\ \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{w}_{i,\xi}^* \\ \mathbf{u}_e^* \\ \mathbf{w}_e^* \\ \mathbf{w}_{e,\xi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_u \mathbf{F}_u(\xi_i) \\ \Phi_w \mathbf{F}_w(\xi_i) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_i) \\ \Phi_u \mathbf{F}_u(\xi_e) \\ \Phi_w \mathbf{F}_w(\xi_e) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_e) \end{bmatrix} \mathbf{c}_h = \mathbf{A}_c \mathbf{c}_h \implies \mathbf{c}_h = \mathbf{A}_c^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^* \\ \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{w}_{i,\xi}^* \\ \mathbf{u}_e^* \\ \mathbf{w}_e^* \\ \mathbf{w}_{e,\xi}^* \end{bmatrix}. \quad (3.3.22)$$

Anschließend substituiert man die Beziehungen für die Gewichtskonstanten \mathbf{c}_k auf der rechten Seite aus Gl. (3.3.22) in die Terme, die in Kapitel 3.3.1 durch die partielle Integration bezüglich ξ entstanden sind und auf den Rändern bei $\xi = \xi_i$ und $\xi = \xi_e$ ausgewertet werden müssen. Auf diese Weise erhält man die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Laminats:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_i^* \\ \mathbf{f}_i^* \\ \mathbf{m}_i^* \\ \mathbf{n}_e^* \\ \mathbf{f}_e^* \\ \mathbf{m}_e^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{E}_u(\xi_i) \begin{bmatrix} \Phi_u \mathbf{F}_{u,\xi\xi}(\xi_i) \\ \Phi_u \mathbf{F}_{u,\xi}(\xi_i) \\ \Phi_u \mathbf{F}_{u,}(\xi_i) \end{bmatrix} - \mathbf{E}_w(\xi_i) \begin{bmatrix} \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi\xi\xi}(\xi_i) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi\xi}(\xi_i) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_i) \\ \Phi_w \mathbf{F}_w(\xi_i) \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_u(\xi_e) \begin{bmatrix} \Phi_u \mathbf{F}_{u,\xi\xi}(\xi_e) \\ \Phi_u \mathbf{F}_{u,\xi}(\xi_e) \\ \Phi_u \mathbf{F}_{u,}(\xi_e) \end{bmatrix} + \mathbf{E}_w(\xi_e) \begin{bmatrix} \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi\xi\xi}(\xi_e) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi\xi}(\xi_e) \\ \Phi_w \mathbf{F}_{w,\xi}(\xi_e) \\ \Phi_w \mathbf{F}_w(\xi_e) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{A}_c^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^* \\ \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{w}_{i,\xi}^* \\ \mathbf{u}_e^* \\ \mathbf{w}_e^* \\ \mathbf{w}_{e,\xi}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^* \\ \mathbf{w}_i^* \\ \mathbf{w}_{i,\xi}^* \\ \mathbf{u}_e^* \\ \mathbf{w}_e^* \\ \mathbf{w}_{e,\xi}^* \end{bmatrix}. \quad (3.3.23)$$

Um den Ausdruck für die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} übersichtlicher zu gestalten, werden dabei die folgenden Hilfsgrößen eingeführt:

$$\mathbf{E}_u(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{A0}\xi & \mathbf{E}_{A1} \\ -\mathbf{E}_{B0}^T\xi & -(\mathbf{E}_{B0}^T - \mathbf{E}_{B1}^T + \mathbf{E}_{B3}^T) & \mathbf{E}_{B4}^T \frac{1}{\xi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}^T\xi & \mathbf{E}_{B3}^T \end{bmatrix}, \quad (3.3.24)$$

$$\mathbf{E}_w(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{B0}\xi & \mathbf{E}_{B1} & \mathbf{E}_{B2} \frac{1}{\xi} \\ -\mathbf{E}_{D0}\xi & -\mathbf{E}_{D0} - \mathbf{E}_{D1} + \mathbf{E}_{D1}^T & (\mathbf{E}_{D3} - \mathbf{E}_{D2}) \frac{1}{\xi} & (\mathbf{E}_{D2} + \mathbf{E}_{D4}) \frac{1}{\xi^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{D0}\xi & \mathbf{E}_{D1} & \mathbf{E}_{D2} \frac{1}{\xi} \end{bmatrix}.$$

Wegen der noch auftretenden Starrkörpermoden ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} singular. Das lineare Gleichungssystem (3.3.23) ist somit nicht eindeutig lösbar. Erst durch geometrische Randbedingungen entlang der diskretisierten Ränder werden Starrkörperverschiebungen und -rotationen verhindert. Geometrische Randbedingungen werden dabei

auf die gleiche Art in die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} implementiert wie in der Finite-Elemente-Methode. Damit ist das Gleichungssystem (3.3.23) eindeutig lösbar. Sind die Verschiebungen entlang des diskretisierten Rands bekannt, lassen sich die Konstanten \mathbf{c}_k rekursiv aus Gl. (3.3.22) bestimmen. Mit den Konstanten \mathbf{c}_k lassen sich dann die Verschiebungen innerhalb des gesamten Gebiets entsprechend den Gleichungen (3.3.20) und (3.3.21) entwickeln. Damit ist die gesuchte Lösung bekannt. Randbedingungen auf den Seitenrändern werden beim Laminat auf die gleiche Weise wie bei der Platte berücksichtigt. Allerdings reicht es beim Laminat im Gegensatz zur Platte nicht aus, Aussagen zu treffen, ob dieses gelenkig gelagert oder eingespannt ist. Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems müssen beim Laminat auch Aussagen über die Inplane-Verschiebungen der Laminatmittenebene entlang der Ränder getroffen werden.

3.4 Untersuchungen der Elementformulierungen

3.4.1 Die Trapezplatte unter Querkraft

Die neue Formulierung des schubstarren Plattenelements in der Rand-Finite-Elemente-Methode wird an Hand einer Trapezplatte, wie in Abb. 3.4 dargestellt, untersucht. Die Trapezplatte sei aus Stahl ($E = 210000\text{N/mm}^2$, $\nu = 0.3$). Der linke Rand der Trapezplatte sei eingespannt, während der rechte mit einer Querkraft $Q = 10\text{N/mm}$ belastet wird. Links ist die Trapezplatte 10mm lang, rechts 20mm. Die Platte ist 5mm breit, ihre Dicke beträgt 1mm. Die Trapezplatte wird in der Rand-Finite-Elemente-Methode diskretisiert, indem man ein kartesisches Koordinatensystem links von der Platte, wie es in Abb. 3.4 dargestellt ist, wählt. Legt man das Skalierungszentrum nun in den Koordinatenursprung, lässt sich die Trapezplatte einfach diskretisieren. Die Skalierungskoordinate ξ läuft nun vom linken Rand ($\xi_i = 0.5$) zum rechten Rand ($\xi_e = 1$). Die zweifach berandete Trapezplatte stellt dabei den allgemeinen Skalierungsfall *I* dar, weil zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und damit zur Lösung des Randwertproblems das gesamte Eigenwertspektrum benötigt wird. In Abb. 3.5 sind die Verschiebungen einer Trapezplatte bei einer Diskretisierung mit

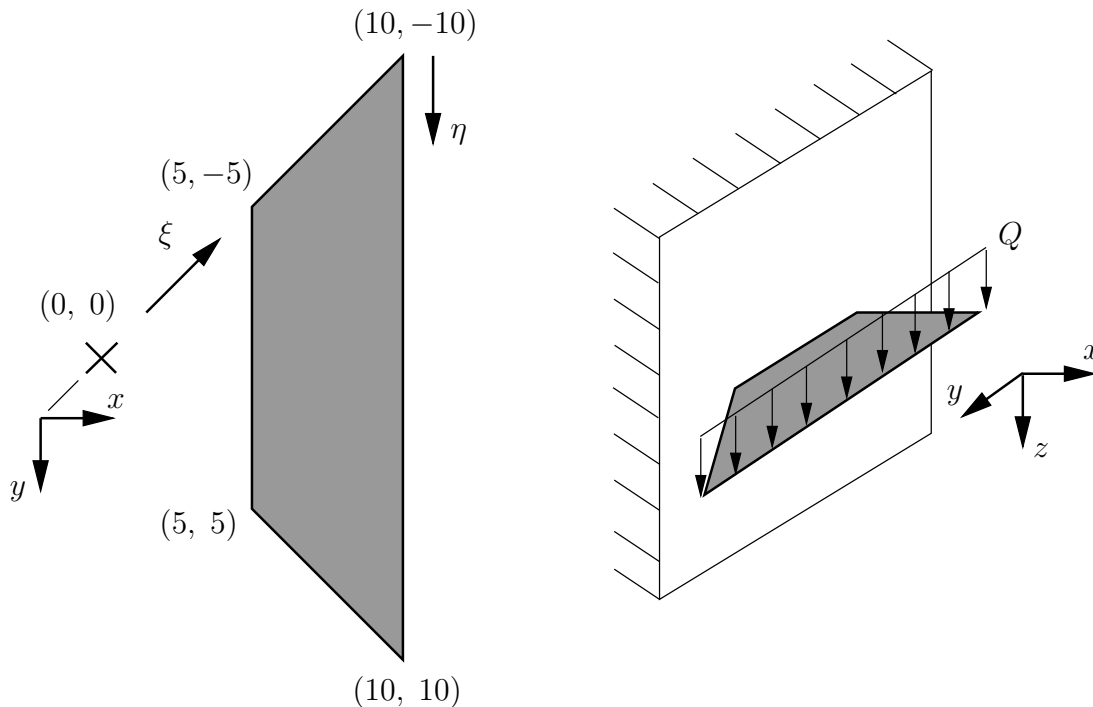


Abb. 3.4: Eingespannte Trapezplatte unter Querkraft

zehn Elementen entlang des rechten Rands mit Hilfe der Rand-Finite-Elemente-Methode dargestellt. Um das Konvergenzverhalten zu untersuchen, wird nun die maximale Verschiebung der Trapezplatte, die an den äußeren Eckpunkten auftritt, einer Referenzlösung gegenübergestellt. Als Referenz dient dabei die Verschiebung einer Finite-Elemente-Rechnung mit ABAQUS. Dazu wird die Trapezplatte sehr fein mit STRI3-Elementen

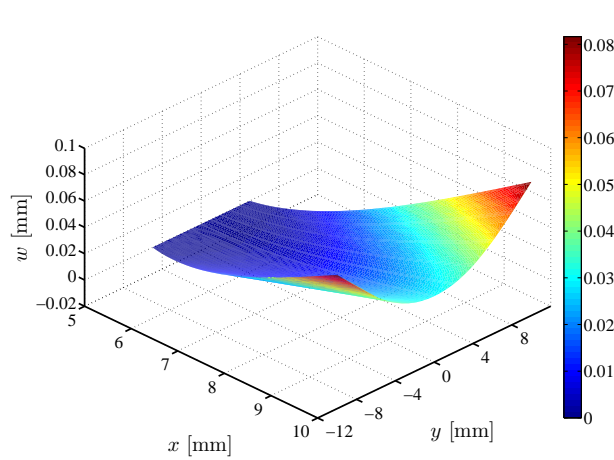
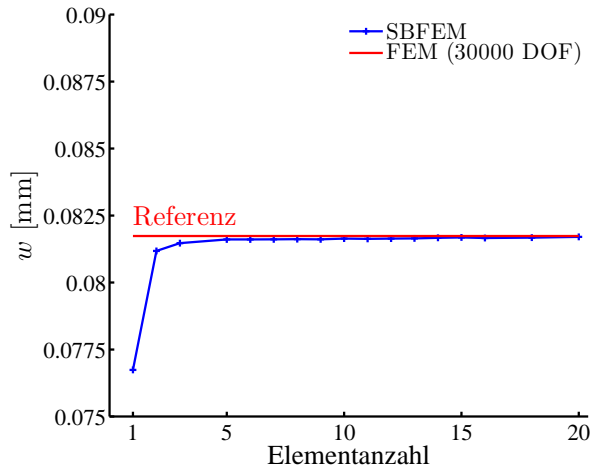
Abb. 3.5: Verschiebungen w 

Abb. 3.6: Konvergenzstudie

diskretisiert. Bei den in ABAQUS implementierten STRI3-Elemente handelt es sich um dreieckige “Diskrete-Kirchhoff-Elemente”. Die Kirchhoff-Hypothese wird bei diesen Elementen nur an diskreten Punkten erfüllt. In Abb. 3.6 ist die maximale Verschiebung für unterschiedliche Diskretisierungen gegen die Referenzlösung aufgetragen. Die Lösung der Rand-Finite-Elemente-Methode konvergiert schnell gegen die Referenzlösung. Bei einer Diskretisierung mit 3 Elementen, dies entspricht 24 Freiheitsgraden, gilt für den relativen Fehler $\delta_w = 3.2410^{-3}$. Der relative Fehler ist somit bereits bei einer groben Diskretisierung mit 3 Elementen deutlich kleiner als 1%.

3.4.2 Der $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund unter Biegebeanspruchung

In diesem Abschnitt wird ein trapezförmiger $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund analysiert. Der Winkelverbund ist aus $\pm 45^\circ$ -Schichten aufgebaut, die aus UHM GY70, einem Verbund aus Kohlenstofffasern und Epoxidharz, bestehen. Die Materialdaten sind in Tab. 3.1 gegeben. Die geometrischen Abmessungen des Winkelverbunds entsprechen denen der Trapezplatte

| | E_1 | E_2 | G_{12} | ν_{12} |
|----------|-------------|----------|----------|------------|
| UHM GY70 | 290 000 MPa | 5000 MPa | 5000 MPa | 0.41 |

Tab. 3.1: Materialdaten Faser-Kunststoff-Verbund UHM GY70

aus Abschnitt 3.4.1, siehe Abb. 3.4. Der $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund ist frei von Biege-Dehn-Kopplungen, weist aber Biege-Drill-Kopplungen in Form der Steifigkeiten D_{16} bzw. D_{26} auf. Der Winkelverbund ist links eingespannt, während er entlang seiner rechten Seite mit einem Biegemoment $M_n = 75\text{N}$ belastet wird. In Abb. 3.7 sind die Verschiebungen

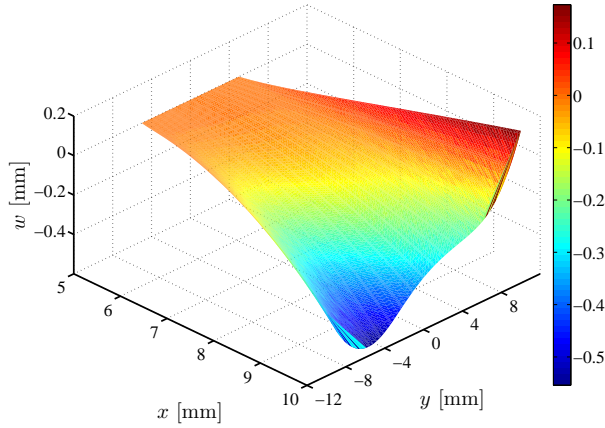
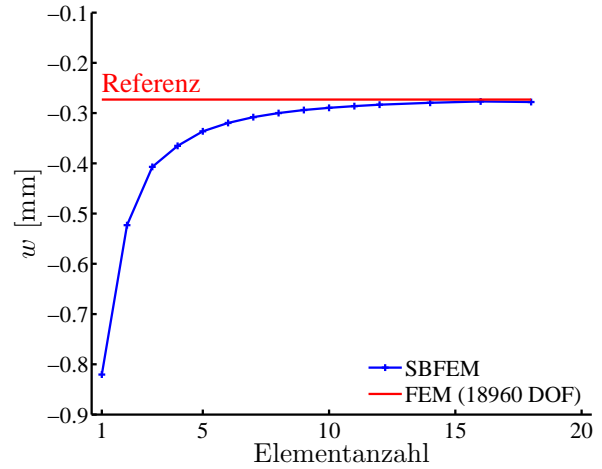
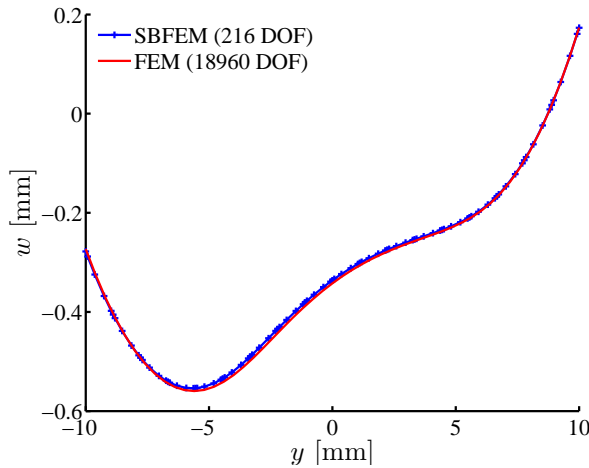
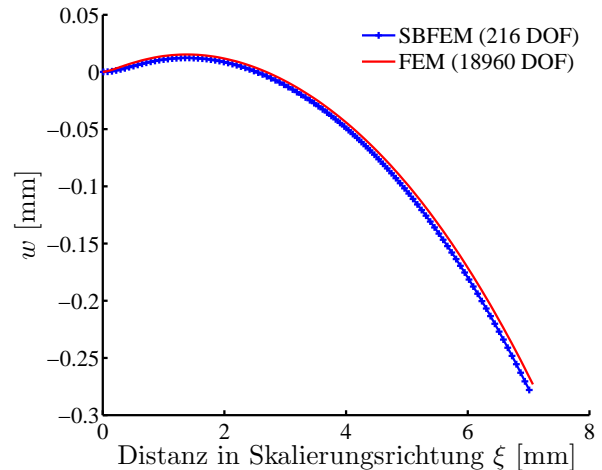
Abb. 3.7: $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund

Abb. 3.8: Konvergenzstudie

w des Verbunds bei einer Diskretisierung mit 18 Elementen entlang des Aussenrands dargestellt. Man erkennt am rechten Rand des Laminats deutlich, dass die Beanspruchung durch ein reines Biegemoment auf Grund der Drillkopplungen auch zu einer Verwölbung des Verbunds führt. In Abb. 3.8 wird die Konvergenz der neuen Elementformulierungen untersucht. Als Referenzlösung dient die Verschiebung w am Punkt $(10/-10)$. Diese Verschiebung wird wiederum mit einer Finite-Elemente-Analyse mit ABAQUS ermittelt, wobei ebenfalls die diskreten Kichhoff-Elemente (STRI3) verwendet werden. Die Lösung konvergiert ebenfalls sehr gut. Bereits bei einer Diskretisierung mit 10 Elementen beträgt der relative Fehler $\delta_w = 0.0598$ und ist somit im einstelligen Prozentbereich. Abschließend ist in Abb. 3.9 die Verschiebung w entlang des rechten Rands sowie in Abb. 3.10 am unteren Rand in Skalierungsrichtung aufgetragen. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung der FE-Rechnung mit den Ergebnissen der Rand-Finite-Elemente-Methode.

Abb. 3.9: Verschiebung w entlang des AussenrandsAbb. 3.10: Verschiebung w in Skalierungsrichtung

3.4.3 Der $[0^\circ/90^\circ]$ -Kreuzverbund unter Normal- und Querkraft

Der einfache Kreuzverbund aus UHM GY70, der in diesem Kapitel behandelt wird, weist wegen der Steifigkeiten B_{11} und B_{22} Biege-Dehn-Kopplungen auf. Das Scheibenverhalten ist somit mit dem Plattenverhalten des Laminats gekoppelt. Die geometrischen Abmessungen entsprechen wiederum denen der Trapezplatte aus Abschnitt 3.4.1. Der Kreuzverbund ist links eingespannt und wird entlang seines rechten Rands durch eine Querkraft

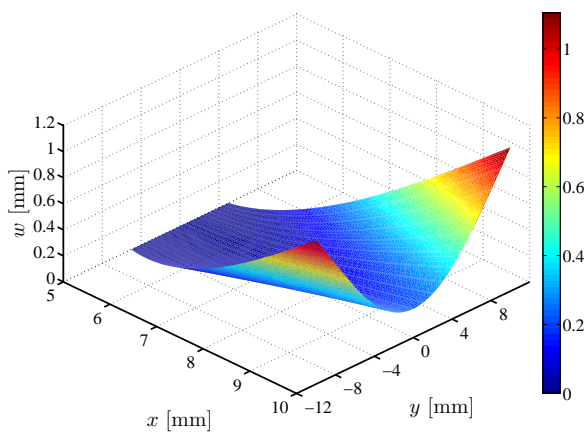


Abb. 3.11: $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund

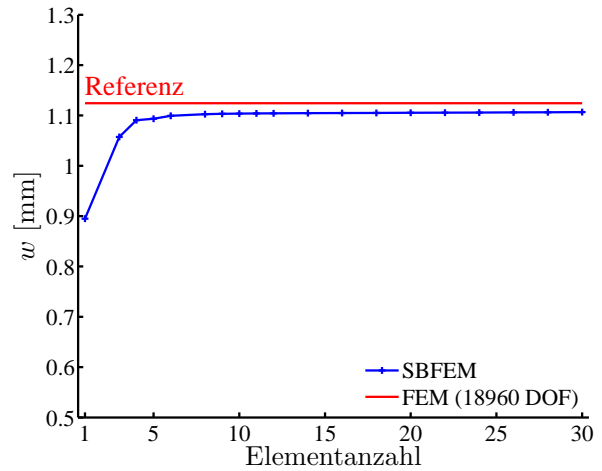


Abb. 3.12: Konvergenzstudie

$Q = 20\text{N/mm}$ sowie eine Normalkraft $N = 50\text{N/mm}$ beansprucht. In Abb. 3.11 ist die Verschiebung w über dem Verbund dargestellt. In Abb. 3.12 wird das Konvergenzverhalten untersucht. Als Referenzlösung dient dabei die Verschiebung w einer FE-Rechnung mit STRI3-Elementen am Punkt $(10/-10)$. In den Abb. 3.13 und 3.14 werden die Verschiebungen u bzw. w entlang des rechten Rands des Laminats einer FE-Rechnung gegenübergestellt. Es ist ersichtlich, dass die Biege-Dehn-Kopplungen des Kreuzverbunds

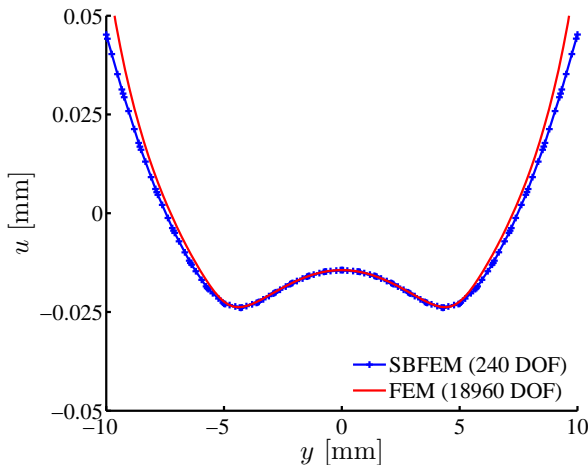


Abb. 3.13: Verschiebung u entlang des Aussenrands

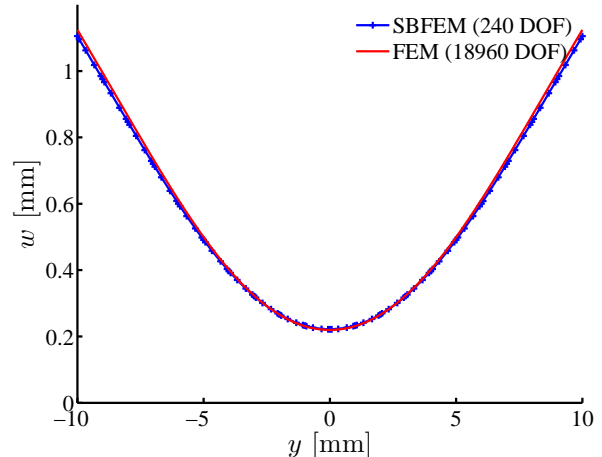


Abb. 3.14: Verschiebung w entlang des Aussenrands

richtig dargestellt werden. Allerdings ist auf Grund der groben Diskretisierung in der Rand-Finite-Elemente-Methode vor allem im Bereich der äußeren Eckpunkte die Inplane-Lösung mit der Rand-Finite-Elemente-Methode im Vergleich zur FE-Lösung zu steif.

Kapitel 4

Analyse von Singularitäten

4.1 Spannungssingularitäten in der linear elastischen Bruchmechanik

Spannungssingularitäten sind ein Phänomen der linearen Elastizitätstheorie. Bei vielen Problemstellungen innerhalb der linearen Elastizitätstheorie treten Spannungssingularitäten auf. Spannungssingularitäten treten z. B. an den Lastangriffspunkten konzentrierter Einzelkräfte oder -momente auf. Aber auch an materiellen und geometrischen Diskontinuitäten, wie Kerben und Rissen, können Spannungssingularitäten entstehen. Diese mathematischen Singularitäten resultieren aus der strengen elastizitätstheoretischen Modellierung. In der Realität treten singuläre Spannungen jedoch nicht auf, da mit Erreichen der Fließgrenze lokale Spannungsspitzen durch inelastische Deformationen wie z. B. plastisches Fließen abgebaut werden. Spannungssingularitäten verletzen zwar nicht direkt die lineare Elastizitätstheorie, sie widersprechen jedoch der Annahme kleiner Verschiebungsgradienten und somit natürlich auch der Annahme kleiner Verzerrungen innerhalb der linearen Elastizitätstheorie. Obwohl Spannungssingularitäten von eher theoretischer Natur sind, spielt ihre Kenntnis vor allem in der linearen Bruchmechanik eine wichtige Rolle. Betrachtet man die Rissausbreitung in spröden Körpern, so basiert ihre Beurteilung auf den an der Rissspitze auftretenden Beanspruchungen und somit den dort herrschenden Spannungen. Die genaue Kenntnis der Spannungsfelder um diese kritische Punkte und damit die Analyse und Bestimmung der Singularitätsordnungen ist deshalb von essentieller Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir uns auf Spannungssingularitäten beschränken, wie sie an geometrischen Diskontinuitäten, also Rissen und Kerben, in schubstarren Platten und Laminaten auftreten. Dabei werden Definitionen, die in der linearen Bruchmechanik üblich sind, verwendet. Für ihre ausführlichere Einführung wird auf die einschlägige Fachliteratur, z. B. Gross und Seelig [47], Anderson [3] oder auch Kuna [53], verwiesen.

Von Williams [105, 107] stammen die ersten Untersuchungen der Verschiebungs- bzw. Spannungsfelder an einer Rissspitze in einer schubstarren Platte auf Grundlage der Kirch-

hoffschen Plattentheorie. Es gelang ihm, die Eigenfunktionen um die Riss Spitze in einer unendlich ausgedehnten Platte durch einen Reihenansatz für die Verschiebung w zu ermitteln. Die Verschiebungen und Spannungen an der Riss Spitze lassen sich dann in folgender Form angeben, wobei man von einem Polarkoordinatensystem r und φ ausgeht, dessen Ursprung in der Riss Spitze liegt:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} K_n r^{\lambda_n} g_n(\varphi), \quad \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n r^{\lambda_n-2} f_{ijn}(\varphi). \quad (4.1.1)$$

Die Stärke des Riss Spitzenfeldes wird von den verallgemeinerten Spannungsintensitätsfaktoren K_n sowie den Singularitätsordnungen λ_n bestimmt. Die Spannungsintensitätsfaktoren K_n hängen von der Geometrie des Randwertproblems sowie der äußeren Belastung der Platte ab. Die Exponenten λ_n sind im Allgemeinen konjugiert komplexe Zahlen. Auf Grund der Kirchhoff-Kinematik sind die Spannungen proportional bezüglich der zweiten Ableitung nach der radialen Koordinate r . Singuläre Spannungen liegen vor, wenn gilt: $\operatorname{Re} \lambda_n - 2 < 0$. Für Exponenten mit $\operatorname{Re} \lambda_n > 2$ bleiben die Spannungen für $r \rightarrow 0$ endlich. Die untere Grenze für die Exponenten folgt aus der Forderung, dass die Formänderungsenergie W_F beschränkt bleibt. Die Formänderungsenergie erhält man durch Integration der Formänderungsenergiedichte U über das Volumen der Platte

$$W_F = \int_V U dV. \quad (4.1.2)$$

Da für die Spannungen ebenso wie für die Verzerrungen gilt:

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \sim \left((\operatorname{Re} \lambda_n)^2 - \operatorname{Re} \lambda_n \right) r^{\operatorname{Re} \lambda_n - 2} \quad (4.1.3)$$

folgt mit der Integration über das Volumen $dV \sim r dr$ schließlich für die Formänderungsenergie:

$$\begin{aligned} W_F &\sim \left((\operatorname{Re} \lambda_n)^2 - \operatorname{Re} \lambda_n \right)^2 r^{2(\operatorname{Re} \lambda_n - 2)} r dr \\ W_F &\sim \left((\operatorname{Re} \lambda_n)^2 - \operatorname{Re} \lambda_n \right)^2 r^{2 \operatorname{Re} \lambda_n - 2}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Die untere Grenze folgt für die Singularitätsordnungen damit zu:

$$2 \operatorname{Re} \lambda_n - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{Re} \lambda_n \geq 1. \quad (4.1.5)$$

Zu einer äquivalenten Aussage gelangt man, wenn man fordert, dass die Verschiebungen und Verdrehungen der Platte endlich bleiben. Da im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie gilt: $\varphi_i \sim w^{\operatorname{Re} \lambda_n - 1}$, folgt daraus ebenfalls als untere Grenze der Singularitätsordnungen $\operatorname{Re} \lambda_n \geq 1$.

Besonderheiten treten bei den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ bzw. $\lambda_{2,3} = 1$ auf. Durch $\lambda_1 = 0$ wird eine Starrkörperverschiebung der Platte beschrieben. Dieser Mode ruft weder Spannungen hervor, noch geht mit ihm eine Deformationsenergie einher, wie aus dem Vorfaktor der

rechten Seite in Gl. (4.1.4) ersichtlich ist. Analog dazu beschreiben Moden zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3} = 1$ Starrkörperrotationen der Platte, durch die ebenfalls keine Spannungen in der Platte hervorgerufen werden, die aber dennoch zur Lösung des vollständigen Randwertproblems der Platte gehören. Außerdem können zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3} = 1$ und $\lambda_4 = 2$ in der RFEM logarithmische Moden der Form $w \sim r \ln r$ bzw. $w \sim r^2 \ln r$ gehören. Diese führen wiederum zu singulären Spannungen, die Felder beschreiben, die durch Einzelmomente bzw. Einzelkräfte, die im Ursprung des Polarkoordinatensystems angreifen, hervorgerufen werden. Aus der Reihendarstellung in Gl. (4.1.1) ist ersichtlich, dass in der Regel mehrere Eigenmoden zu singulären Spannungen führen können. Dabei dominiert der Eigenwert λ mit dem betragsmäßig kleinsten Realteil das Spannungsfeld im Bereich um die Risspitze. In den Analysen zu den Singularitätsordnungen in den folgenden Kapiteln werden jedoch alle auftretenden Singularitäten aufgeführt.

Das bekannteste Beispiel für Singularitäten ist die Singularität an einer Risspitze in einer homogenen Scheibe, bei der die Spannungen proportional zu $r^{-0.5}$ sind. Die Singularitätsordnung folgt dann mit -0.5 . Der Riss in einer Scheibe, stellt im Bereich der homogenen, linear-elastischen Konfigurationen die stärkste Singularität dar und dient deshalb als Vergleichsmaßstab. Dieses von der Scheibe bekannte Verhalten lässt sich auf die Platte übertragen. So weisen die Spannungen an einer Risspitze in einer homogenen Platte das gleiche Verhalten auf wie in einer Scheibe. Auch hier gilt für die Normal- und Schubspannungen in der Plattenebene $\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$. Analog zur Scheibe lässt sich auch bei der Platte das Verschiebungs- sowie das Spannungsfeld in einen zum Riss symmetrischen bzw. einen asymmetrischen Teil aufspalten, die durch die Spannungsintensitätsfaktoren K_I bzw. K_{II} beschrieben werden können. Dabei lässt sich K_I konsistent zur Scheibe Normalspannungen zuordnen und geht somit auf die Plattenbiegung zurück, während der zweite Bruchmode, der durch K_{II} beschrieben wird, den Schubspannungen zu zuordnen ist und folglich durch Plattentorsion hervorgerufen wird. Diese Einteilung geht auf Sih u. a. [78] zurück. Analog zur Scheibe werden auch bei der Platte Singularitäten im Bereich $1 \geq \operatorname{Re} \lambda - 2 > -0.5$ als schwache Singularitäten bezeichnet. Singularitäten im Bereich $-0.5 \geq \operatorname{Re} \lambda - 2 > -1$ werden dagegen als starke Singularitäten oder Hypersingularitäten bezeichnet. Die Schubspannungen senkrecht zur Plattenebene weisen im Fall eines Risses eine $r^{-3/2}$ -Singularität auf. Dieses Verhalten folgt aus der Kirchhoffschen Plattentheorie, da die Spannungsfreiheit an den freien Rändern nur näherungsweise über die Kirchhoffschen Ersatzquerkräfte erfüllt wird.

Neben den erwähnten Singularitäten können vor allem bei Bi- oder Trimaterialkonfigurationen auch logarithmische Singularitäten auftreten. Die Spannungen weisen dann folgendes Verhalten auf: $\sigma_{ij} \sim r^{\operatorname{Re} \lambda - 2} \ln r$. Logarithmische Singularitäten treten üblicherweise an den Übergangsstellen zweier reller zu einem komplexen Eigenwert auf. Um ihre Untersuchung haben sich im Bereich der Scheiben vor allem Dempsey und Sinclair [31–33] verdient gemacht. Logarithmische Singularitäten sind stärker als die gewöhnliche $r^{\operatorname{Re} \lambda - 2}$ -Singularität. Sator [76] zeigt jedoch, dass logarithmische Singularitäten nur in unbedeutender Weise stärker sind. Er argumentiert, da logarithmische Singularitäten üblicherweise an Übergangsstellen auftreten bei denen es sich um isolierte Punkte handelt, folgt, dass

sich in der Umgebung der Übergangsstelle immer Eigenwerte finden lassen, die zu einer stärkeren gewöhnlichen Singularität führen. Bei isolierten Punkten kann es sich um einen bestimmten diskreten Winkel oder ein bestimmtes Verhältnis zweier E-Module handeln. Logarithmische Singularitäten lassen sich mit der Rand-Finite-Elemente-Methode ebenfalls ermitteln. Sie treten auf, wenn ein Eigenwert mehrfach vorkommt und dabei seine geometrische Vielfachheit kleiner als seine algebraische Vielfachheit ist.

Im Folgenden wird ein Überblick über Arbeiten, die von der Ermittlung von Singularitätsordnungen handeln, gegeben. Es werden zuerst analytische Verfahren, denen vor allem ebene Problemstellungen zu Grunde liegen, aufgeführt. Dann folgen Arbeiten, die sich mit Singularitätsordnungen in Platten befassen. Arbeiten, die die Analyse von Singularitätsordnungen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode zum Inhalt haben, sind in Kapitel 1.2 aufgeführt.

4.2 Stand der Forschung – Singularitätsordnungen

Analytische Verfahren und ebene Problemstellungen

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die verschiedenen Arbeiten gegeben, die sich mit der Bestimmung von Singularitätsordnungen befassen und zum Verständnis dieser Arbeit von Bedeutung sind. Auf Grund der Vielzahl an Publikationen kann jedoch kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben werden. Die Artikel von Sinclair [82, 83] geben einen guten Überblick zur Thematik, zur geschichtlichen Entwicklung, den verschiedenen Problemstellungen und unterschiedlichen Analyseverfahren. Der erste Artikel von Sinclair [82] befasst sich dabei mit dem Auftreten und der Interpretation von Spannungssingularitäten, während der zweite [83] sich vor allem mit der asymptotischen Identifikation von Singularitätsordnungen beschäftigt. Eine ausführliche Darstellung zur Thematik findet sich auch bei Leguillon [55]. Die meisten Arbeiten beschränken sich auf zweidimensionale Problemstellungen. Dabei haben sich drei verschiedene mathematische Ansätze zur asymptotischen Analyse der Spannungssingularitäten etabliert:

1. die Eigenfunktions-Expansionsmethode
2. die Methode der komplexen Potentiale
3. die Mellin-Transformation

Die asymptotische Analyse läuft bei allen der drei genannten Verfahren ähnlich ab. Zuerst wählt man in der Regel ein Polarkoordinatensystem, dessen Ursprung zweckmäßigerweise in den Punkt, an dem singuläre Spannungen erwartet werden, gelegt wird. Bei geometrischen Diskontinuitäten wie Rissen und Kerben ist dies die Risspitze bzw. der Kerbgrund. Anschließend formuliert man die Rand- sowie bei der Untersuchung von Multimaterialkonfigurationen auch Übergangsbedingungen, wodurch man ein lineares Gleichungssystem

erhält. Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems führt auf ein charakteristisches Polynom, dessen Nullstellen λ unter anderem die Singularitätsordnung kennzeichnen. Bei ebenen Problemen wie Scheiben aber auch bei dreidimensionalen Problemstellungen gilt der folgende Zusammenhang zwischen den Spannungen σ im Abstand r von der Risspitze: $\sigma \sim r^{\lambda-1}$.

Eine der ersten Arbeiten [104], die sich explizit mit der Bestimmung von Singularitätsordnungen befasst, stammt von Williams aus dem Jahr 1952. Williams untersucht mit der Eigenfunktions-Expansionsmethode Spannungssingularitäten an den Ecken von homogenen, isotropen Scheiben [104]. Dabei analysiert er den Einfluss verschiedener Randbedingungen auf den Seitenflächen, die die Ecke aufspannen, auf die Stärke der Singularitäten. Sind die Ränder, die die Ecke formen, entweder beide frei oder beide fest eingespannt, erhält er im Fall eines geraden Risses die bekannte Rissspitzensingularität $\lambda = 0.5$. Wird der Riss geöffnet, wird mit steigendem Kerböffnungswinkel die Singularität schwächer, bis sie bei einem Kerböffnungswinkel von $\alpha = 180^\circ$ schließlich verschwindet. Ist ein Rand eingespannt und der andere frei, treten stärkere Singularitäten auf. Im Fall eines Risses gilt $\lambda = 0.25$, womit für die Spannungen $\sigma \sim r^{-0.75}$ folgt. Williams verweist auf eine frühere Arbeit [105], in der er Platten behandelt, und zieht Analogien zwischen Scheiben und Platten. So verhalten sich die Spannungen bei einer Scheibe mit zwei freien Rändern lokal am Kerbgrund genau gleich wie bei einer Platte, bei der beide Ränder eingespannt sind. Weitere Arbeiten, die auf der Eigenfunktions-Expansionsmethode zur Ermittlung von Singularitätsordnungen beruhen, stammen von Brahtz [12] und Williams [106, 107]. Die Arbeit von Williams [107] bezieht sich dabei auf die Spannungsverteilung an einem Riss in einer Platte, während die anderen Arbeiten ebene Probleme behandeln.

Daneben gibt es eine Vielzahl weiterer Arbeiten, in denen Spannungssingularitäten an Multi-Materialkonfigurationen ermittelt werden. Die erste stammt von Zak und Williams [118], die die Spannungssingularitäten an einem Riss in einem Bimaterial untersuchen. Der Riss verläuft dabei in einem isotropen Material und trifft senkrecht auf das andere isotrope Material. Bei dieser speziellen Konfiguration ist der kleinste Eigenwert reell, während er im Gegensatz dazu bei Konfigurationen, wo der Riss entlang des Interfaces verläuft, siehe Williams, Rice und Sih [74] oder Dempsey und Sinclair [32, 33] konjugiert komplex ist. Treten komplexe Exponenten auf, liegen folglich oszillierende Spannungsfelder vor. Williams weist als Erster auf diese Thematik hin. Dempsey und Sinclair [31–33] weisen außerdem auf logarithmische Singularitäten hin. Dempsey gibt ein Kriterium an, mit dem geprüft werden kann, ob logarithmische Singularitäten auftreten können. In der Regel treten logarithmische Singularitäten an Übergangsstellen von einer komplexen zu zwei reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms auf. Solche Situationen entstehen bei bestimmten geometrischen Konfigurationen für gewisse Bimaterialkonfigurationen, wenn die Steifigkeiten beider Materialien in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen.

Carpenter [17] untersucht mit einem Kontur-Integral singuläre Spannungen an einschnittigen Klebverbindungen. Er untersucht nur den freien Rand der Fügung mit dem von ihm “Reciprocal Work Contour Integral Method” genannten Verfahren und koppelt diesen Bereich mit einer ihn umgebenden Finite-Elemente-Diskretisierung. 1985 nutzt Carpenter

[16] die Methode der komplexen Potentiale, um Spannungssingularitäten an beliebigen Ecken zu erfassen. Ebenfalls mit einem Kontur-Integral untersucht Carpenter [18] Spannungssingularitäten an V-Kerben. Munz und Yang [70] untersuchen Spannungskonzentrationen an den freien Rändern von Bimaterialkonfigurationen. Sie beschränken sich auf isotrope Materialien, die ideal miteinander verbunden sind. In einer weiteren Arbeit beschäftigen sich Munz und Yang [114] mit Bimaterialkonfigurationen unter thermischer Belastung, wobei sie zur Analyse die Methode der komplexen Potentiale nutzen. Suga et al. [98] analysieren ebenfalls Bimaterialkonfigurationen hinsichtlich des Einflusses unterschiedlicher Materialeigenschaften. Pageau et al. [71] bestimmt mit dem Ansatz von Williams Singularitätsordnungen von Trimaterialkonfigurationen, wobei er sowohl von ideal miteinander verbundenen Konfigurationen als auch von rissbehafteten Strukturen ausgeht. Zur Modellierung legt er den nichtebenen Schubspannungszustand zu Grunde. Wang und Stahle [101] beschäftigen sich mit Rissen in Bimaterialkonfigurationen, wobei sie die Methode der komplexen Potentiale zur Analyse nutzen. Logarithmische Spannungssingularitäten am Multi-Materialkonfigurationen werden von Joseph und Zhang [50] untersucht. Ebenfalls logarithmische Singulartäten aber mit der Methode der komplexen Potentiale werden von Cho und Carpenter [25] behandelt. Spannungssingularitäten an Schäftungen werden von Quian [73] in Abhängigkeit von Material und Schäftungswinkel ausgewertet, wobei er die Materialabhängigkeit über die Dundurs-Parameter formuliert. Chen [23] untersucht geometrisch ähnliche anisotrope Trimaterialkonfigurationen, wobei er den ebenen Verzerrungszustand zu Grunde legt. Ebenfalls Trimaterialkonfigurationen untersuchen Carpinteri und Paggi [19, 20], sie bestimmen bei ebenen Problemen Singularitätsordnungen ideal verbundener sowie gerissener Konfigurationen, untersuchen den Einfluss des Materials und ziehen darüber hinaus Analogien zu Problemen der Strömungsmechanik. Eine ausführliche Arbeit zu Spannungssingularitäten stammt von Sator [76]. Er untersucht verschiedene Bi- und Trimaterialkonfigurationen mit der Methode der komplexen Potentiale. Barroso et al. [8], Papadakis und Babushka [72] beschäftigen sich mit dem numerischen Aspekt der Nullstellensuche an Multi-Materialverbindungen.

Die Mellin-Transformation eignet sich ebenso wie die Eigenfunktions-Expansionsmethode und die Methode der komplexen Potentiale zur Analyse von Spannungssingularitäten. Bereits 1948 untersuchte Tranter [100] damit einen unendlich ausgedehnten Keil dessen Flanken belastet waren. Godfrey [44] greift 1955 die Mellin-Transformation wieder auf und erweitert und kombiniert die Methode mit der Methode der komplexen Potentiale. Es lassen sich mittels Mellin-Transformation aber auch Spannungssingularitäten am Interface zweier Materialien erfassen, vgl. Hein und Erdogan [48]. Weitere Arbeiten zu singulären Spannungen, bei denen zur Analyse die Mellin-Transformation eingesetzt wird, stammen von Yang und Munz [113] zu Bimaterialien unter thermischer Beanspruchung sowie von Inoue und Koguchi [49] zu Trimaterialverbindungen.

Singularitätsordnungen von Platten unter Biegung und Laminaten

Von Anfang an stehen bei der Ermittlung von Singularitätsordnungen nicht nur Scheiben sondern auch Platten im Mittelpunkt des Interesses. So befasst sich Williams bereits 1951 in einer seiner ersten Arbeiten [105] mit Spannungssingularitäten an Platten. Dabei untersucht er mit der Eigenfunktions-Expansionsmethode die Spannungssingularitäten am Kerbgrund einer Platte, wobei er unterschiedliche Randbedingungen auf den Kerbflanken annimmt. In einer weiteren Arbeit untersucht er 1961 den Spannungszustand an einem Riss in einer unendlich ausgedehnten Platte [107]. Fast zeitgleich mit der Analyse von Singularitäten an Bimaterialkonfigurationen von Scheiben, vgl. Zak und Williams [118], veröffentlichen Sih und Rice ihre Arbeit [79]. Sie gehen von der gleichen Bimaterialkonfiguration aus, legen bei der Modellierung aber die Kirchhoffsche Plattenkinematik zu Grunde. Fenner [42] betrachtet 1976 neben Scheibenproblemen auch den nichtebenen Schubspannungszustand sowie Plattenprobleme. Er geht von der gleichen Bimaterialkonfiguration wie Williams [107] aus, variiert aber den Winkel, unter dem der Riss auf das Interface trifft. Risse und Kerben in isotropen Platten werden außerdem von Blum und Rannacher [11] sowie Melzer und Rannacher [65] analysiert. Melzer und Rannacher geben für verschiedene Randbedingungen auf den Kerbflanken kritische Winkel an, bis zu denen singuläre Momente und Querkkräfte auftreten. Speziell nach logarithmischen Singularitäten sucht Sinclair, wobei er ebenfalls von schubstarren Platten ausgeht [81]. Sinclair bezieht sich auf eine frühere Arbeit, in der er sich mit logarithmischen Singularitäten in Scheiben befasst [80]. Carpinteri et al. [21] untersuchen Spannungssingularitäten an Kerben in Balken, die aus mehreren Materialien aufgebaut sind, mit der Methode der komplexen Potentiale und vergleichen ihre Ergebnisse mit FE-Rechnungen. Kotousow und Lew [52] ermitteln die Eigenfunktionen einer keilförmigen Platte auf Grundlage der Mindlinschen Plattentheorie mit der Eigenfunktions-Expansionsmethode von Williams [104] für verschiedene Randbedingungen. Mit der Untersuchung von Singularitäten in Platten, denen die Plattentheorie von Reissner zu Grunde liegt, beschäftigen sich Burton und Sinclair [15]. Sie geben die Eigenfunktionen für verschiedene Randbedingungskombinationen bei keilförmigen Platten an, werten die Exponenten jedoch nicht aus. Labossiere und Huang untersuchen Spannungssingularitäten an einer gekerbten Platte [54]. Sie vergleichen dabei die Kirchhoff Theorie mit der Reissner Theorie und stellen beiden Theorien die Ergebnisse experimenteller Untersuchungen gegenüber. Rössle und Sändig untersuchen ebenfalls auf Grundlage der Reissnerschen Plattentheorie Spannungssingularitäten an gerissenen und gekerbten Platten [75]. Sie geben zu allen unterschiedlichen Randbedingungskombinationen die Eigenfunktionen an und weisen die Singularitäten in Abhängigkeit des Kerbwinkels aus.

4.3 Singularitätsexponenten der isotropen Platte

Wie bereits in Kapitel 1.2 erwähnt, eignet sich die Rand-Finite-Elemente-Methode besonders zur Analyse von Singularitäten, wie sie an materiellen und geometrischen Diskontinuitäten entstehen. Insbesondere lassen sich Singularitätsexponenten einfach aber präzise mit der Rand-Finite-Elemente-Methode ermitteln, wenn das Skalierungszentrum in die Risspitze gelegt wird. Hierin ist auch der große Vorteil der Rand-Finite-Elemente-Methode gegenüber der klassischen Finite-Elemente-Methode zu sehen. Mit der FEM können Singularitätsexponenten nicht direkt ermittelt werden. Um sie zu bestimmen, muss in der FEM ein vollständiges Randwertproblem gelöst werden, die Spannungen müssen ausgewertet und anschließend doppeltlogarithmisch dargestellt werden. Um mit diesem Verfahren genaue Resultate zu erzielen, ist ein hoher Diskretisierungsaufwand in der FEM nötig.

Es gibt in der Literatur zahlreiche Arbeiten zur Rand-Finite-Elemente-Methode, die von der Ermittlung von Singularitätsordnungen handeln. Die erste Arbeit auf diesem Gebiet stammt dabei von Song [97], wobei er sich auf ebene Probleme, orthotrope Scheiben unter Schub, beschränkt. Song untersucht daneben Spannungssingularitäten bei dynamischen Problemstellungen [85], logarithmische Singularitäten [86] sowie Multimaterialverbindungen [87]. Daneben finden sich in der Literatur noch zahlreiche andere Arbeiten, die sich mit der Analyse von Spannungssingularitäten in dreidimensionalen Strukturen beschäftigen, neben Song sind hier Mittelstedt und Becker [67] sowie Mayland und Becker [62, 63] zu nennen. Für einen ausführlicheren Überblick sei auf Kapitel 1.2 verwiesen. Neu an dieser Arbeit ist die Analyse von Spannungssingularitäten in dünnen schubstarren Platten, die durch die Kirchhoff-Theorie beschrieben werden. Die Problemstellung ist dabei nicht neu. So untersucht Williams [105] bereits 1952 in einer der ersten Arbeiten, die sich überhaupt mit der Analyse von Singularitätsordnungen beschäftigen, die Spannungen in dünnen schubstarren Platten mittels der von ihm geprägten Eigenfunktions-Expansionsmethode. Ausgangspunkt sind dabei Experimente der US Air Force an dünnen Platten in Form von Sektoren, an denen ein Rand frei und der andere eingespannt ist. Bei diesen Experimenten wird beobachtet, dass mit größer werdendem eingeschlossenen Winkel immer höhere Spannungen an der Plattenspitze auftreten. Williams beschränkt sich in seiner Arbeit [105] auf keilförmige Platten, wobei der zwischen den beiden Flanken der Platte eingeschlossene Winkel 180° nicht übersteigt. Ausführlichere Analysen zu Singularitäten in isotropen Platten finden sich dann bei Melzer und Rannacher [65] sowie Blum und Rannacher [11]. In den folgenden Kapiteln werden die Singularitätsexponenten an Rissen und Kerben in Platten und Laminaten bestimmt. Für ausführlichere Darstellungen der Herleitungen der Elementformulierungen sei für Platten auf [34] und für Lamine auf [35, 36] verwiesen.

Analysiert man Singularitätsexponenten, so ist insbesondere das asymptotische Verhalten der Lösung $w(r, \varphi)$ für $r \rightarrow 0$ an einem kritischen Randpunkt von Interesse. Unter einem kritischen Randpunkt versteht man unter anderem eine einspringende Ecke. Zur Modellierung führt man ein Polarkoordinatensystem, dessen Ursprung mit dem kritischen Randpunkt zusammenfällt. Bei der Platte unterscheidet man freie Ränder ($M_n = \bar{Q}_n = 0$),

gelenkig gelagerte ($w = 0$, $M_n = 0$) sowie eingespannte Ränder ($w = w_{,n} = 0$). Untersucht man nun das asymptotische Verhalten an kritischen Randpunkten, so muss man sechs verschiedene Randbedingungskombinationen auf den Seitenflächen bzw. den Kerb-

| | |
|---------|-------------------------------------|
| F/F : | frei/frei, |
| F/G : | frei/gelenkig gelagert |
| F/E : | frei/eingespannt |
| G/G : | gelenkig gelagert/gelenkig gelagert |
| G/E : | gelenkig gelagert/eingespannt |
| E/E : | eingespannt/eingespannt |

Tab. 4.1: Randbedingungskombinationen Platte

flanken der Ecke unterscheiden, die in Tab. 4.1 aufgeführt sind. erinnert man sich an die Verschiebungen und Spannungen aus Gl. (4.1.1), so ist ersichtlich, dass vor allem Exponenten im Bereich $1 < \lambda_n \leq 2$ von Interesse sind, da sie singuläre Momente im kritischen Randpunkt hervorrufen. Außerdem interessieren Moden, deren zugehörige Exponenten im Bereich $1 < \lambda_n \leq 3$ liegen, da sie singuläre Querkräfte für $r \rightarrow 0$ verursachen. Für die Untersuchungen der Singularitätsexponenten λ_n sowie der zugehörigen Deformationsmoden werden verschiedene Kerbkonfigurationen und Randbedingungskombinationen der Kerbflanken untersucht. Ausgangspunkt aller Simulationen ist dabei eine Kreisplatte mit Riss, deren Radius $r = 10\text{mm}$ ist. Anschließend wird der Riss zum Kerb erweitert. Der Winkel zwischen den Kerbflanken wird vergrößert und die Singularitätsexponenten λ_n werden über dem Kerböffnungswinkel dargestellt. Dabei wird in der Rand-Finite-Elemente-Methode die Elementgröße so gewählt, dass das Winkelsegment $\Delta\varphi$, das von einem Element aufgespannt wird, immer kleiner als ca. 8° ist. Es hat sich nämlich bei Vergleichen mit analytischen Lösungen, siehe Rannacher und Melzer [65], gezeigt, dass dann für den relativen Fehler immer gilt: $\delta_\lambda \leq 0.001$. Wird für die Analyse der Kreisplatte eine Diskretisierung mit 46 Elementen gewählt, ist der relative Fehler folglich immer kleiner als ein Promille und somit vernachlässigbar.

In Abb. 4.1 sind die Singularitätsexponenten λ_n über dem Kerböffnungswinkel α aufgetragen, wobei sich die Rissufer bzw. Kerbflanken frei bewegen können. Die Biegemomente M_n normal zum Rand sowie die Kirchhoffschen Ersatzquerkräfte \overline{Q}_n verschwinden somit entlang der Kerbflanken. In Abb. 4.1 und auch in den übrigen Abbildungen des Kapitels 4.3 sind im Bereich $1 < \lambda_n < 3$ nur Exponenten abgebildet, die zu singulären Lösungen führen. So tritt für jeden Winkel α bei der Randbedingungskombination frei / frei zum Eigenwert $\lambda = 0$ ein Deformationsmode auf, der eine Starrkörperverschiebung der Platte in z -Richtung beschreibt. Außerdem erhält man für jeden Winkel α zwei voneinander unabhängige Starrkörperrotationen zum Eigenwert $\lambda = 1$. Diese Moden werden natürlich zur vollständigen Lösung des Randwertproblems benötigt. Da diese Starrkörpermoden aber keine Verzerrungen in der Platte hervorrufen, verursachen sie auch keine Spannungen. Sie werden deshalb zum regulären Lösungsanteil gezählt und hier nicht weiter behandelt. Im Fall eines geraden Risses ($\alpha = 0^\circ$) erhält man nun zu den betragsmäßig kleinsten Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 1.5$ zwei unabhängige Deformationsmoden. Weil in der Plattentheorie

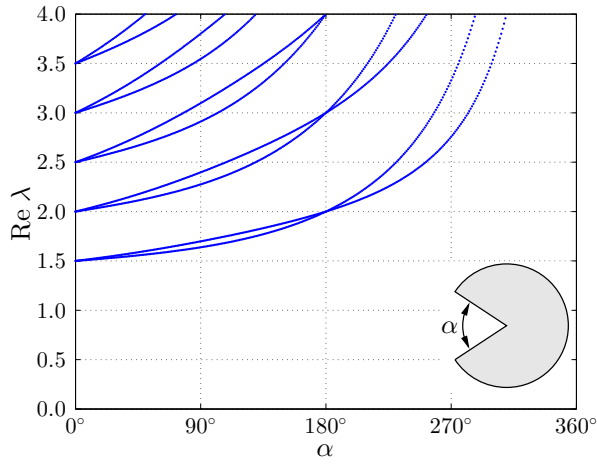


Abb. 4.1: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/F

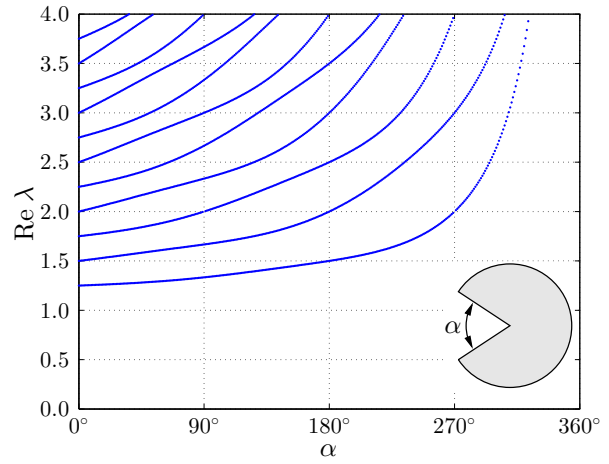


Abb. 4.2: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/G

die Spannungen proportional zur zweiten Ableitung der Verschiebung w bezüglich der radialen Koordinate r sind, gilt $\sigma_{ij} \sim r^{\lambda_{1,2}-2} = r^{-0.5}$. Man erhält somit für einen Riss in einer Platte die aus der Scheibentheorie bekannte klassische Rissspitzensingularität ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$). Ähnlich wie in der Scheibentheorie, vgl. Gross und Seelig [47], tritt dabei eine zur x, z -Ebene symmetrische Rissöffnung, sowie eine zur x, z -Ebene asymmetrische Rissöffnung auf. In den Abb. 4.3 und 4.4 sind diese für einen Kerböffnungswinkel von $\alpha = 30^\circ$ dargestellt. Dabei geht, wie aus den Abbildungen ersichtlich ist, die symmetrische Rissöffnung mit einem Biegemoment einher, während die asymmetrische durch ein Drillmoment verursacht wird. Beide Moden führen für Kerbwinkel $\alpha < 180^\circ$ für $r \rightarrow 0$ zu singulären Momenten ($\text{Re } \lambda < 2$) und damit zu singulären Spannungen. Im Gegensatz zur Scheibe geht jedoch nicht die symmetrische Rissöffnung, sondern die asymmetrische mit dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert λ_1 für Winkel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ einher. Die stärkere Singularität wird folglich von einer Verdrillung der Platte hervorgerufen. Diese ist somit

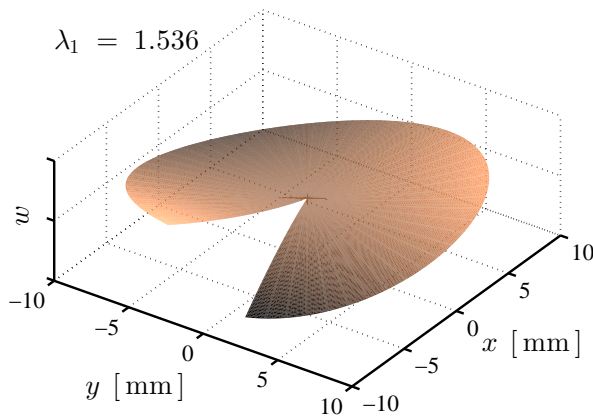


Abb. 4.3: Mode asym. Rissöffnung
Randbedingungen: F/F

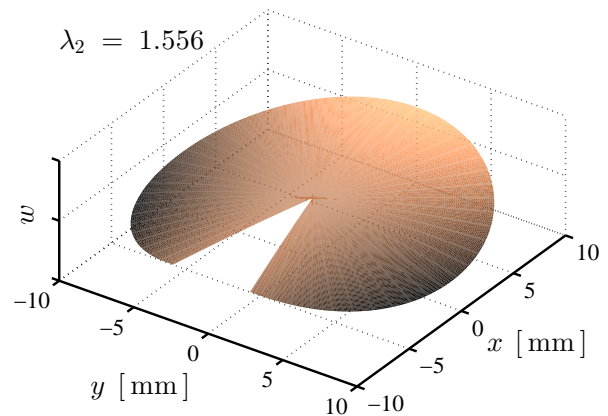


Abb. 4.4: Mode sym. Rissöffnung
Randbedingungen: F/F

als kritischer als eine Biegebeanspruchung der Platte anzusehen. Eine Ausnahme stellt der Eigenwert $\lambda = 2$ dar. In der Regel gehört er zu regulären Lösungsanteilen. Bei der Platte mit freien Rändern und den Konfigurationen $\alpha = 0^\circ$ sowie $\alpha = 180^\circ$ tritt der Eigenwert $\lambda = 2$ mehrfach auf, wobei seine geometrische Vielfachheit immer um eins geringer ist als seine algebraische. Daraus resultieren logarithmische Lösungsanteile $w(r) \sim r^2 \ln r$, die zu singulären Spannungen der Form $\sigma_{ij} \sim \ln r$ führen. Geht man noch einen Schritt weiter und betrachtet die Querkkräfte, so gilt $Q \sim 1/r$. Daraus folgt, dass der logarithmische Verschiebungsmodus zum Eigenwert $\lambda = 2$ Spannungen beschreibt, die durch eine Einzelkraft, die im Skalierungszentrum der Platte in z -Richtung angreift, hervorgerufen werden. Weiter treten bis zu einem Winkel von $\beta \approx 77.75^\circ$ singuläre Querkkräfte auf. Querkkräfte resultieren in der Kirchhoffschen Plattentheorie aus Gleichgewichtsbetrachtungen am Plattenelement. In Tab. 4.2 sind die kritischen Winkel β aufgeführt, bei denen die Momente M_n bzw. die Querkkräfte Q_n singulär werden. Diese sind Melzer und Rannacher [65] entnommen und gekennzeichnet durch:

$$M_n < \infty \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda \geq 2, \quad \overline{Q}_n < \infty \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_n \geq 3.$$

Außerdem ist der betragsmäßig kleinste Eigenwert zu diesen kritischen Winkeln sowie der daraus resultierende relative Fehler δ_λ in Abhängigkeit der Elementanzahl n_e in Tab. 4.2 aufgeführt. Die mit der Rand-Finite-Elemente-Methode ermittelten Singularitäten werden somit mit analytischen Lösungen verglichen. Man erhält für die Randbedingungskombination frei/frei bei einer relativ groben Diskretisierung mit 9 Elementen, womit ein Element die Elementgröße $\Delta\varphi = 20^\circ$ besitzt, $\lambda_1 = 2.00013$. Für den relativen Fehler folgt $\delta_\lambda = 6.510^{-5}$. Mit der Rand-Finite-Elemente-Methode erhält man somit für eine relativ grobe Diskretisierung eine ausgezeichnete Lösung für die Singularität. Darüber hinaus lässt sich aus den Deformationsmoden ablesen, welche Beanspruchungen als besonders kritisch anzusehen sind. Diese Eigenschaften zeichnen die Rand-Finite-Elemente-Methode im Bereich der Bruchmechanik gegenüber der klassischen Finite-Elemente-Methode aus. In Abb. 4.2 sind die Exponenten λ_n für die Randbedingungskombination frei/gelenkig gelagert aufgetragen. Für die gerissene Platte erhält man drei Deformationsmoden, die zu singulären Spannungen σ_{ij} führen. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1.25$ gehören die besonders starken singulären Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$. Weiter geht der Eigenwert $\lambda_2 = 1.5$ mit der klassischen Rissspitzensingularität einher, während der dritte Eigenwert $\lambda_3 = 1.75$ zu einer schwächeren Singularität $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$ führt. Singuläre Momente treten bis zu einem Winkel von $\alpha_M = 270^\circ$ auf, singuläre Querkkräfte bis zu einem Winkel von $\beta_Q = 52.054^\circ$. Für die Randbedingungskombination frei/eingespannt sind die Exponenten λ in Abb. 4.5 dargestellt. Alle Eigenwerte im Bereich $0 < \operatorname{Re} \lambda_n \leq 3$ sind konjugiert komplex, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abb. 4.5 nur die Realteile der Eigenwerte aufgeführt sind. Es treten also nur sogenannte oszillierende Spannungssingularitäten auf. Die stärkste Singularität gehört zum Eigenwert $\lambda = 1.25 + i0.1234$. Eine schwächere folgt zum Eigenwert $\lambda = 1.75 + i0.1234$. Interessant ist, dass die Imaginärteile aller Eigenwerte im Bereich $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq 3$ für $\alpha = 0^\circ$ exakt gleich groß sind. Singuläre Momente kommen bis zu einem Winkel von $\alpha_M \approx 264.651^\circ$ vor, singuläre Querkkräfte erhält man bis zu einem Winkel von

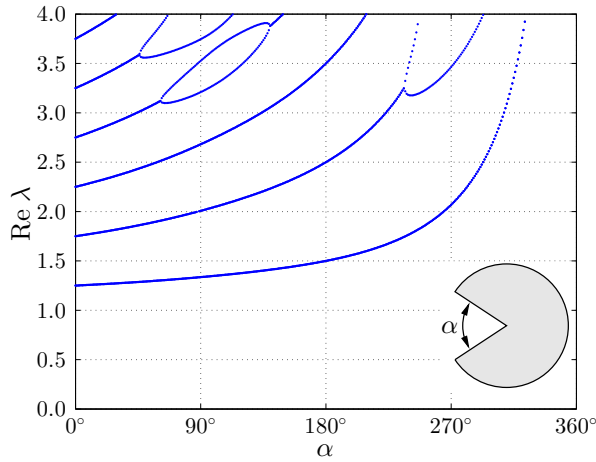


Abb. 4.5: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/E

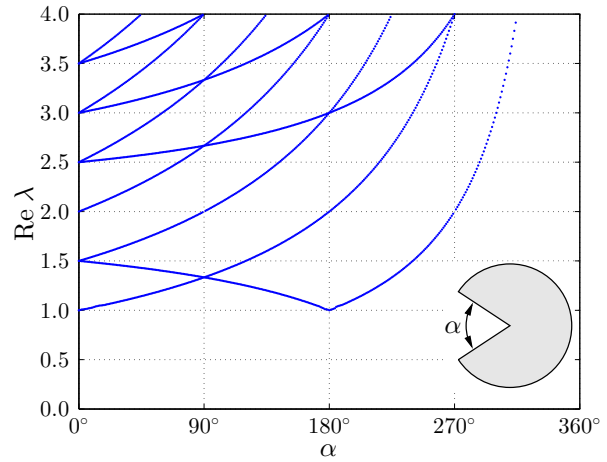


Abb. 4.6: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: G/G

$\alpha_Q \approx 307.946^\circ$. In der Regel nimmt der $\text{Re } \lambda_n$ mit zunehmendem Kerbwinkel α zu, d. h. die Stärke der die Singularität nimmt mit steigendem Kerbwinkel α ab.

Die Ausnahme stellt die in Abb. 4.6 dargestellte Randbedingungskombination gelenkig gelagert/gelenkig gelagert dar. Für $\alpha = 0^\circ$ erhält man zwei Eigenwerte $\lambda_{2,3} = 1.5$, die mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen. Der betragsmäßig kleinste Eigenwert $\lambda_1 = 1$ wiederum beschreibt eine Starrkörperrotation um den Riss, die sich einstellen kann, da beide Rissufer gelenkig gelagert sind. Vergrößert man den Winkel α , wird diese Starrkörperrotation verhindert und es stellen sich sehr starke singuläre Spannungen ein. Bei $\alpha_M = 180^\circ$ tritt wiederum eine Starrkörperrotation jedoch um die globale y -Achse auf. Singuläre Momente liegen bis zu Winkeln von $\alpha_M = 270^\circ$ vor, während Querkräfte bis zu Winkeln von $\beta_Q = 60^\circ$ auftreten. In Abb. 4.7 werden die Eigenwerte für die Randbedingungskombination gelenkig gelagert/eingespannt und in Abb. 4.8 für die Lagerung eingespannt/eingespannt dargestellt. In blau sind dabei die Realteile und in rot die Imaginärteile der Eigenwerte aufgetragen. Alle Eigenwerte, die zu singulären Momenten führen, sind reell. Für die Lagerung gelenkig gelagert/eingespannt liegen im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ stärkere Singularitäten als die klassische Rissspitzensingularität vor. Beim Riss gilt $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$. Selbst im Fall, dass beide Ränder eingespannt sind, kommen im Fall eines Risses Singularitäten von der Stärke der klassischen Rissspitzensingularität vor, dies ist allerdings aus der Literatur bekannt, vgl. Sinclair [82, 83].

In Abb. 4.7 und Abb. 4.8 treten mehrfach sogenannte Verzweigungspunkte auf. Diese sind gekennzeichnet durch das Zusammenlaufen zweier reeller Eigenwerte zu einem konjugiert komplexen oder der Aufspaltung eines konjugiert komplexen in zwei reelle. An diesen Übergangspunkten kommen die Eigenwerte doppelt vor, wobei ihre geometrische Vielfachheit geringer ist als ihre algebraische Vielfachheit. Es treten an diesen Übergangspunkten folglich logarithmische Lösungsanteile auf, vgl. Dempsey and Sinclair [31]. Bei der isotropen Platte führen die logarithmischen Lösungen allerdings nur zu singulären Querkräften. In Tab. 4.2 sind abschließend die kritischen Winkel β_M bzw. β_Q aufgeführt

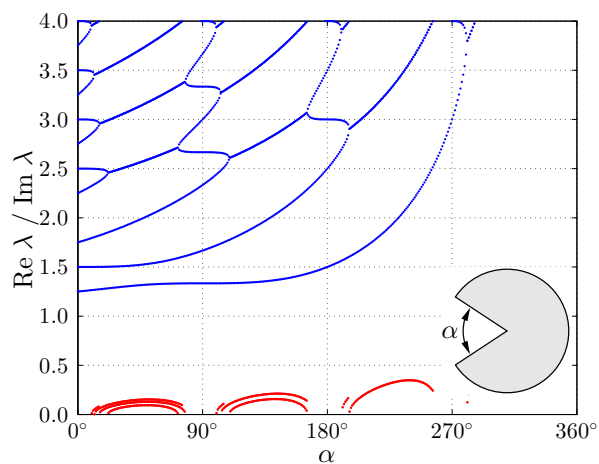


Abb. 4.7: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: G/E

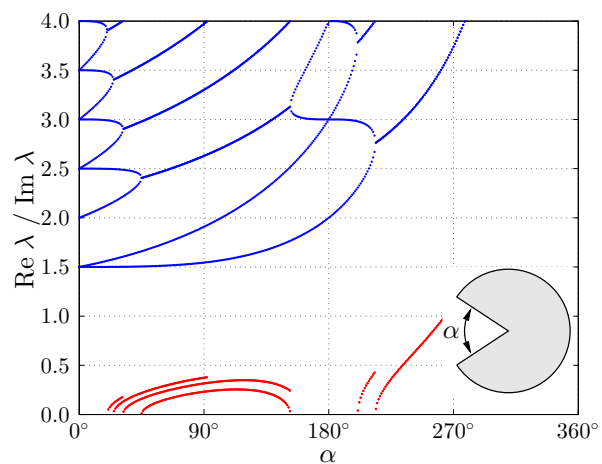


Abb. 4.8: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: E/E

bis zu denen singuläre Momente und Querkräfte auftreten. Es gilt: $\alpha + \beta = 360^\circ$. Die Winkel sind Blum und Rannacher [11] entnommen. Außerdem ist der relative Fehler für den jeweiligen Eigenwert dargestellt, den man auf Grund unterschiedlicher Diskretisierungen in der Rand-Finite-Elemente-Methode bei seiner Berechnung macht. Dabei zeigt sich, dass die Näherung mit der RFEM für die Singularitäten bereits bei groben Diskretisierungen ausgezeichnete Resultate liefert.

| | | Elementanzahl n_e | | | |
|-------|----------------------------|---------------------|------------------------|--------------------|-----------------------|
| RBen | Winkel | $n_e = 5$ | | $n_e = 10$ | |
| | | $\lambda_{n_e=5}$ | δ_λ [%] | $\lambda_{n_e=10}$ | δ_λ [%] |
| F/F | $\beta_M = 180.0^\circ$ | 2.00125 | 0.0625 | 2.00011 | 0.0055 |
| | $\beta_Q = 77.7533^\circ$ | 3.00038190 | $1.9095 \cdot 10^{-4}$ | 3.00002508 | $8.36 \cdot 10^{-4}$ |
| F/G | $\beta_M = 90.0^\circ$ | 2.0001285 | $6.425 \cdot 10^{-3}$ | 2.0000081 | $4.05 \cdot 10^{-4}$ |
| | $\beta_Q = 51.1233^\circ$ | 3.0001351 | $4.503 \cdot 10^{-3}$ | 3.0000087 | $2.913 \cdot 10^{-4}$ |
| F/E | $\beta_M = 95.3491^\circ$ | 2.00008616 | $4.308 \cdot 10^{-3}$ | 2.00000568 | $2.840 \cdot 10^{-4}$ |
| | $\beta_Q = 52.0543^\circ$ | 3.00007114 | $2.371 \cdot 10^{-3}$ | 3.00000080 | $2.666 \cdot 10^{-5}$ |
| G/G | $\beta_M = 90.0^\circ$ | 2.00021201 | $1.060 \cdot 10^{-2}$ | 2.00001337 | $6.685 \cdot 10^{-4}$ |
| | $\beta_Q = 60.0^\circ$ | 3.00035745 | $1.192 \cdot 10^{-2}$ | 3.00002257 | $7.523 \cdot 10^{-4}$ |
| G/E | $\beta_M = 128.7267^\circ$ | 2.00086377 | $4.319 \cdot 10^{-2}$ | 2.00005588 | $2.794 \cdot 10^{-3}$ |
| | $\beta_Q = 90.0^\circ$ | 3.00265480 | $8.849 \cdot 10^{-2}$ | 3.00017116 | $5.705 \cdot 10^{-3}$ |
| E/E | $\beta_M = 180.0^\circ$ | 2.00320865 | $1.604 \cdot 10^{-1}$ | 2.00021216 | $1.061 \cdot 10^{-2}$ |
| | $\beta_Q = 126.2837^\circ$ | 2.99734284 | $8.857 \cdot 10^{-2}$ | 2.9998309 | $5.636 \cdot 10^{-3}$ |

Tab. 4.2: Kritische Winkel für Biegemomente β_M und Querkräfte β_Q einer isotropen Platte sowie die relativen Fehler δ_λ für unterschiedliche Diskretisierungen

4.4 Singularitätsexponenten der orthotropen Platte

Die erste Arbeit, die sich mit dem Einfluss der Orthotropie auf Spannungssingularitäten im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie befasst, stammt aus dem Jahr 1958 und geht auf Chapkis und Williams [22] zurück. Die Arbeit ist dabei einzuordnen in eine ganze Reihe von Arbeiten von Williams [104–106] zur Bestimmung von Singularitäten nicht nur gerissener und gekerbter Platten sondern auch Scheiben. Chapkis und Williams [22] untersuchen in ihrer Arbeit Spannungssingularitäten in gerissenen und gekerbten kreisförmigen Platten. Sie nutzen zur Analyse die Eigenfunktions-Expansionsmethode und geben die Eigenfunktionen zur Bestimmung der Eigenwerte für die sechs verschiedenen Randbedingungskombinationen der Platte an. Die Eigenfunktionen hängen dabei neben den Öffnungswinkeln der Kerbe von den Verhältnissen der E-Module ab. Chapkis und Williams [22] geben an, dass im Fall einer gerissenen Kreisplatte bei bestimmten E-Modul-Verhältnissen stärkere Singularitäten als die klassische Rissspitzensingularität auftreten können. In diesem Abschnitt sollen die Möglichkeiten der Rand-Finite-Elemente-Methode bei der Untersuchung von Singularitätsexponenten aufgezeigt werden. Dabei wird von einem technisch relevanten Material, einem Verbund aus Carbonfasern und Epoxidharz (HM M40) ausgegangen, dessen Materialdaten in Tab. 4.3 aufgeführt sind. Diskutiert wird

| | E_1 | E_2 | G_{12} | ν_{12} |
|--------|-------------|----------|----------|------------|
| HM M40 | 220 000 MPa | 7000 MPa | 5000 MPa | 0.35 |

Tab. 4.3: Materialdaten Faser-Kunststoff-Verbund HM M40

der Einfluss unterschiedlicher Materialorientierungen ϑ auf die sich einstellenden Spannungssingularitäten für verschiedene Kerböffnungswinkel α . Die Materialorientierung ϑ kennzeichnet dabei den Winkel, unter dem die Materialhauptachsen der Platte gegenüber dem globalen x, y -Koordinatensystem gedreht sind, bzw. unter dem sie auf den Riss bzw. die Winkelhalbierende der Kerbe treffen. In Abb. 4.9 und Abb. 4.10 sind die Eigenwerte λ für unterschiedliche Orientierungen ϑ der Materialhauptachsen zum Riss für die Randbedingungskombination frei/frei dargestellt. Im linken Diagramm in Abb. 4.9 verläuft die Materialhauptachse parallel zum Riss ($\vartheta = 0^\circ$), während sie im rechten Diagramm aus Abb. 4.10 senkrecht auf den Riss trifft ($\vartheta = 90^\circ$). Im rechten Diagramm in Abb. 4.9 sowie im linken Diagramm in Abb. 4.10 sind dagegen gerissene und gekerbte Konfigurationen dargestellt, bei denen die Materialhauptachsen unter einem Winkel von $\vartheta = 45^\circ$ bzw. $\vartheta = 60^\circ$ auf den Riss bzw. die Winkelhalbierende der Kerbe treffen. Bei allen Konfigurationen erhält man im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zwei Deformationsmoden, die zu singulären Momenten führen. Für einen Riss ($\alpha = 0^\circ$) führen diese beiden Moden unabhängig von der Orientierung der Materialhauptachsen zu singulären Spannungen in der Stärke der klassischen Rissspitzensingularität. Betrachtet man die Deformationsmoden, die zu den

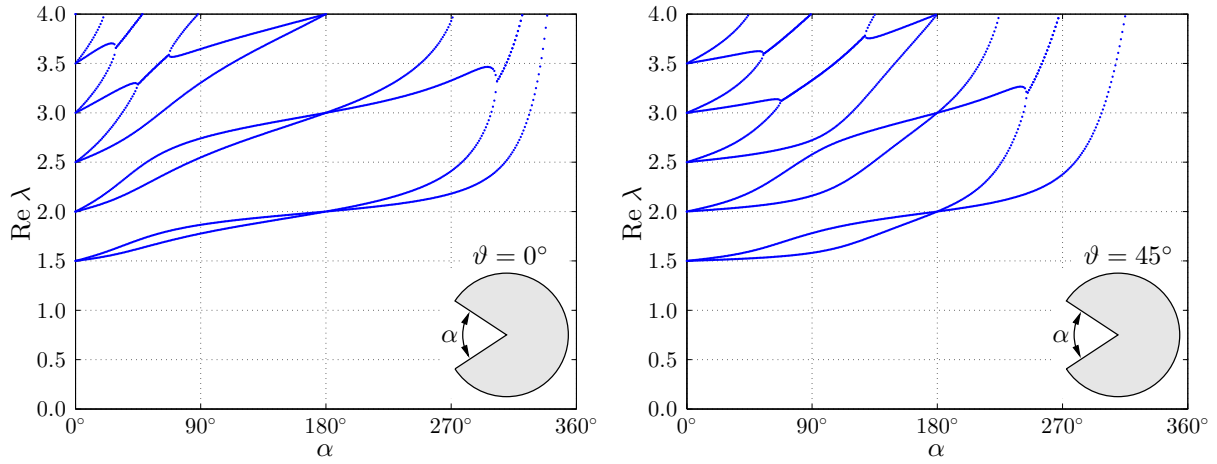


Abb. 4.9: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: F/F

Eigenwerten $1.5 \leq \lambda < 2$ gehören, für die Konfigurationen $\vartheta = 0^\circ$ sowie $\vartheta = 90^\circ$, erhält man für beide Konfigurationen eine zum Riss symmetrische Öffnung, die eine Biegung beschreibt, sowie eine zum Riss asymmetrische Öffnung, die eine Verdrillung der Platte beschreibt. Beide Konfigurationen sind symmetrisch zur x -Achse und damit zum Riss. Sie sind somit frei von Drillkopplungen. In Abb. 4.11 und Abb. 4.12 sind die Deformationsmoden für $\vartheta = 0^\circ$ sowie in den Abb. 4.13 und 4.14 für $\vartheta = 90^\circ$ bei einem Kerböffnungswinkel von $\alpha = 30^\circ$ dargestellt. Dabei fällt auf, dass im Gegensatz zur isotropen Platte aus Kapitel 4.3, bei der orthotropen Platte für die Konfigurationen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ im gesamten Bereich $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ immer der symmetrische Rissöffnungsmodus, der eine Biegung der Platte beschreibt, mit der stärkeren Singularität bezüglich der Momente einhergeht. Bei allen Konfigurationen mit $\vartheta \neq 0^\circ$ bzw. $\vartheta \neq 90^\circ$, also wenn die Faserorientierung bzw. die Materialhauptachse nicht parallel zum Riss verläuft oder senkrecht auf diesen trifft, sind auf Grund der dann vorhandenen Plattensteifigkeiten D_{16} bzw. D_{26} die Biegung sowie die Drillung der Platte miteinander gekoppelt. Damit sind alle Deforma-

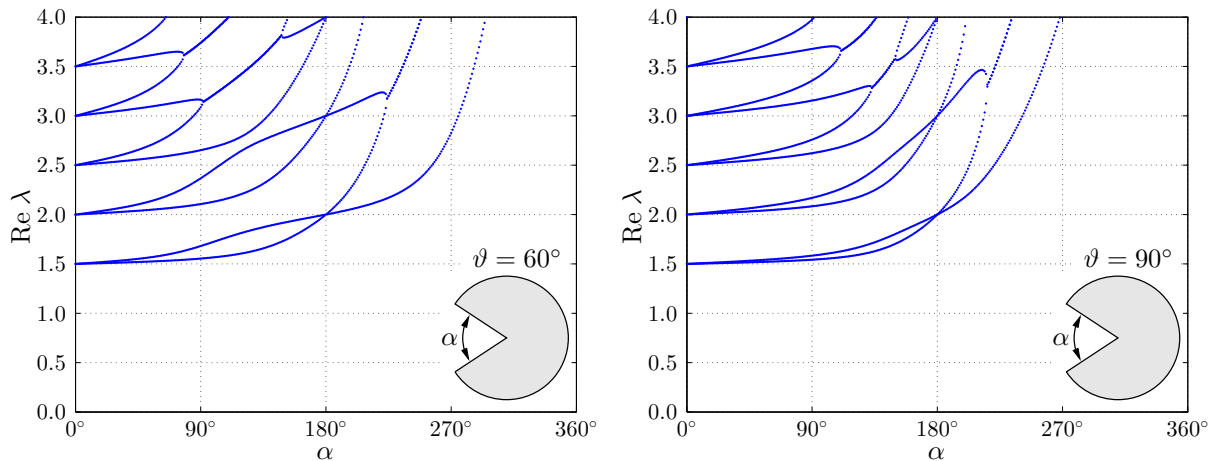


Abb. 4.10: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: F/F

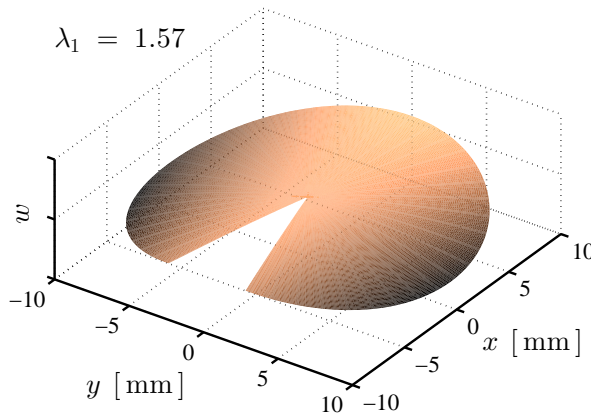


Abb. 4.11: Sym. Mode, $\vartheta = 0^\circ$,
Randbedingungen: F/F

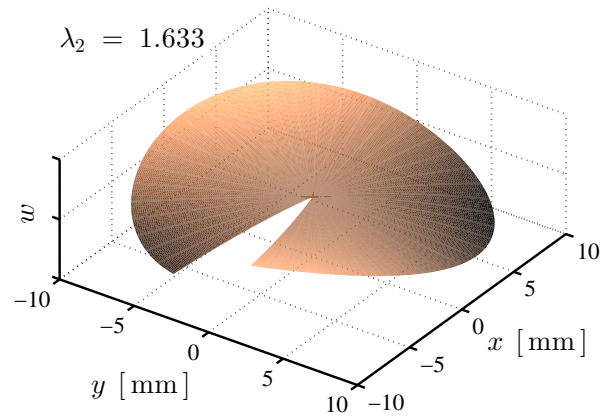


Abb. 4.12: Asym. Mode, $\vartheta = 0^\circ$,
Randbedingungen: F/F

tionsmoden, die im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zu singulären Momenten führen, nicht mehr einem symmetrischen bzw. asymmetrischen Rissöffnungsmodus zuzuordnen, sondern stellen immer eine Kombination aus Biegung und Verdrillung der Platte dar. Die Stärke der stärksten Singularität nimmt mit der Materialorientierung ϑ bei konstantem Kerbwinkel α zu. Der Zusammenhang ist in Abb. 4.15 für die Kerböffnungswinkel $\alpha = 30^\circ$ rechts bzw. $\alpha = 60^\circ$ im linken Diagramm dargestellt. Die stärkste Singularität erhält man folglich für einen konstanten Kerböffnungswinkel immer dann, wenn die Winkelhalbierende der Kerbe und die Materialhauptachse einen rechten Winkel einschließen. Mit Einschränkung gilt dieses Verhalten tendenziell auch für den Deformationsmode, der die zweitstärkste Singularität bezüglich der Momente hervorruft. Prinzipiell können die Konfigurationen $\vartheta = 90^\circ$ und $\vartheta = 0^\circ$ als Grenzwerte betrachtet werden, die Konfiguration mit $\vartheta = 90^\circ$ stellt dabei im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ die untere und somit kritischere Grenze dar, die obere Grenze wird durch die Konfiguration $\vartheta = 0^\circ$ gebildet. Alle anderen Konfigurationen befinden sich im Bereich zwischen diesen Grenzverläufen. Betrachtet man die Querkräfte bei Winkeln $\alpha > 180^\circ$ ergibt sich ein umgekehrtes Bild. Die Singularitäten sind dann umso stärker und

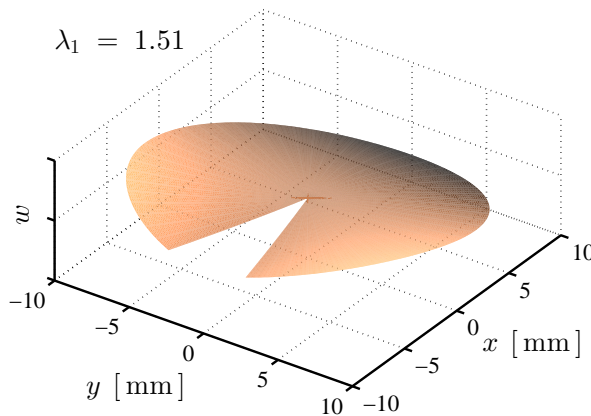


Abb. 4.13: Sym. Mode, $\vartheta = 90^\circ$,
Randbedingungen: F/F

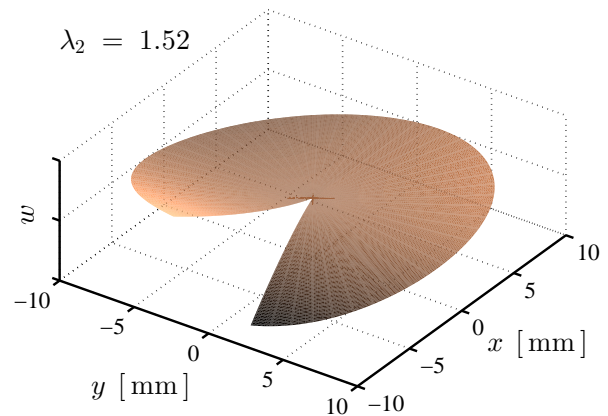


Abb. 4.14: Asym. Mode, $\vartheta = 90^\circ$,
Randbedingungen: F/F

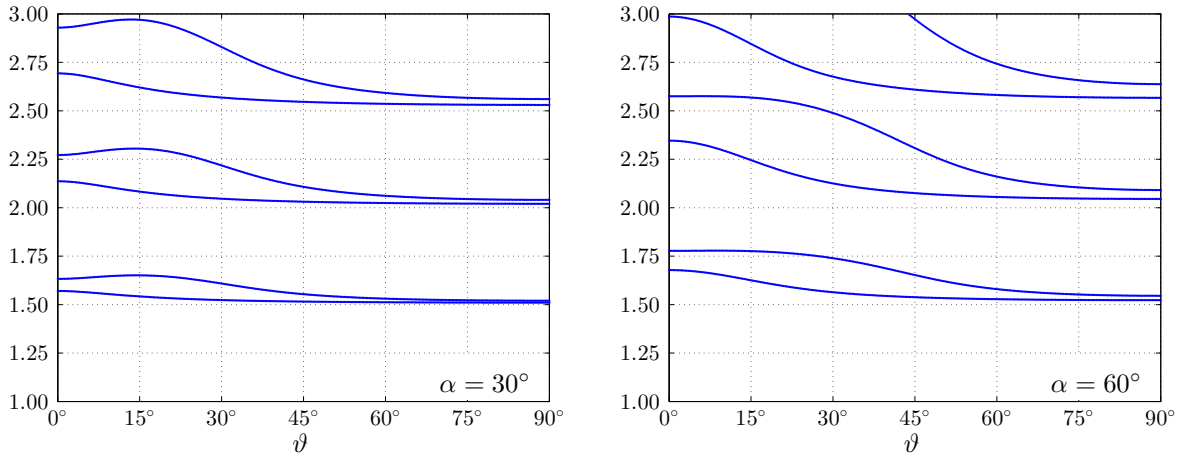


Abb. 4.15: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ über ϑ , RBen: F/F

treten bei umso größeren Winkeln α auf, je geringer der Lagenwinkel ϑ zwischen Materialhauptachse und Winkelhalbierender der Kerbe ist, wobei die kritischste Situation für $\vartheta = 0^\circ$ vorliegt. In Tab. 4.4 sind die kritischen Winkel für die Konfigurationen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ für die unterschiedlichen Randbedingungskombinationen aufgeführt, bis zu denen singuläre Momente und Querkräfte auftreten.

In Abb. 4.16 sind die Eigenwerte für die Randbedingungskombination frei/gelenkig gelagert, bzw. in Abb. 4.17 für die Randbedingungen frei/eingespannt jeweils für die Konfigurationen $\vartheta = 0^\circ$ im linken Diagramm sowie $\vartheta = 90^\circ$ im rechten Diagramm dargestellt. Die Konfigurationen mit den Lagenwinkeln $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ können ähnlich wie in den vorausgegangenen Analysen als oberer und unterer Grenzfall für die Stärke der Singularität angesehen werden. Die Eigenwerte aller anderen Konfigurationen, die zu singulären Momenten und Querkräften führen, liegen in dem Bereich, der durch die Konfigurationen mit den Materialorientierungen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$ aufgespannt wird. Im Fall eines Risses erhält man, unabhängig von der Materialorientierung ϑ aber auch vom Material, da dies auch für das isotrope Material aus Kapitel 4.3 gilt, drei Moden, die zu singulären

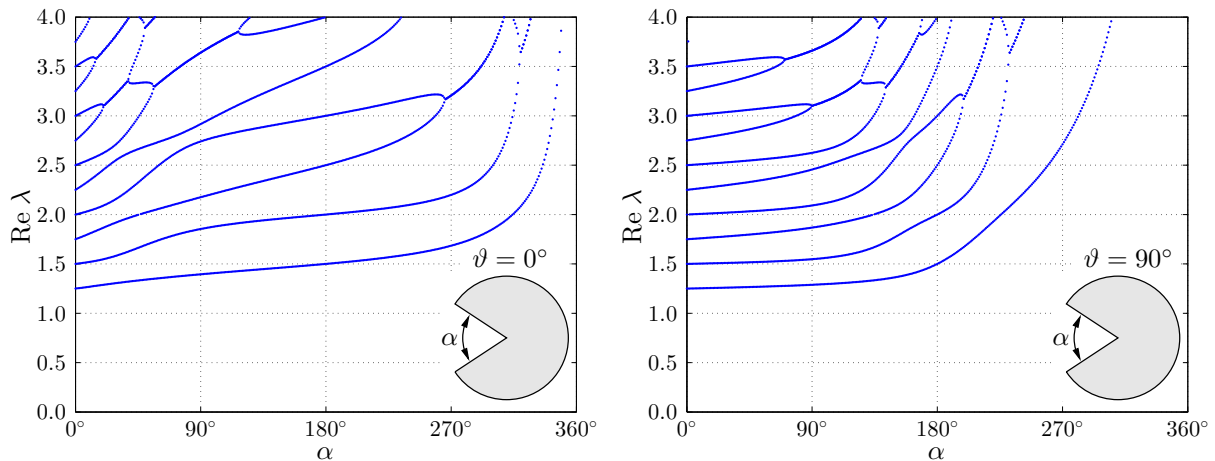


Abb. 4.16: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: F/G

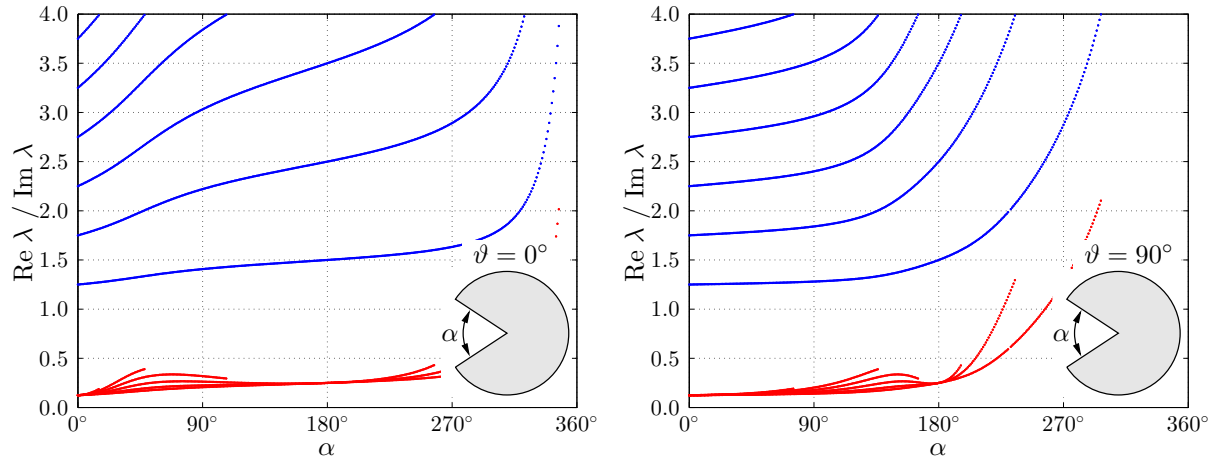


Abb. 4.17: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: F/E

Momenten führen. Die Eigenwerte zu diesen drei Moden sind alle reell. Der Deformationsmode zum kleinsten Eigenwert, der zur stärksten Singularität führt, ruft Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ hervor. Im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ ist die durch diesen Deformationsmode hervorgerufene Spannungssingularität stärker als die klassische Rissspitzeningularität. Auch für Winkel $\alpha > 180^\circ$ ruft dieser Mode singuläre Momente hervor, wobei dann Konfigurationen mit der Materialorientierung $\vartheta = 0^\circ$ als am kritischsten anzusehen sind, da sie die stärksten singulären Momente bis zu einem Winkel von $\alpha_M = 314.25^\circ$ hervorrufen. Neben diesem Eigenwert gibt es einen Eigenwert $\lambda_2 = 1.5$, der im Fall eines Risses die klassische Rissspitzeningularität verursacht und im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ singuläre Momente hervorruft. Der dritte Eigenwert $\lambda_3 = 1.75$ für $\alpha = 0^\circ$ geht ebenfalls mit singulären Momenten einher allerdings nur bis zu einem Winkel von $\alpha_{M_3} = 45.73^\circ$ bei der Materialkonfiguration $\vartheta = 0^\circ$ und $\alpha_{M_3} = 134.20^\circ$ bei $\vartheta = 90^\circ$. Alle Eigenwerte bei der Randbedingungskombination frei/eingespannt, die singuläre Momente und Querkräfte hervorrufen, sind im Vergleich zur Randbedingung frei/gelenkig gelagert konjugiert komplex. Da die Stärke der Singularität vom Realteil des Eigenwerts bestimmt wird, ist die stärkste im Fall eines Risses auftretende Singularität bei den Randbedingungen frei/eingespannt bzw. frei/gelenkig gelagert gleich stark. Auffallend ist außerdem, dass der kleinste Eigenwert für die Konfiguration $\vartheta = 90^\circ$ für kleinere Kerbwinkel α relativ konstant bleibt. Für eine Kerbe mit $\alpha = 90^\circ$ ist im Fall frei/gelenkig gelagert $\lambda_1 = 1.288$ bzw. $\text{Re } \lambda_1 = 1.280$ für die Randbedingungen frei/eingespannt. Dies ist zum Ausgangswert von $\lambda_1 = 1.25$ bei $\alpha = 0^\circ$ nur ein Unterschied von ca. 3 %.

Bei der Randbedingungskombination gelenkig gelagert/gelenkig gelagert treten wie im isotropen Fall die stärksten Singularitäten auf und zwar in den Bereichen für $\alpha \rightarrow 0^\circ$ und $\alpha \rightarrow 180^\circ$, wobei bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ der Deformationsmode zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ keine Spannungssingularität sondern eine Starrkörperrotation beschreibt. Gleichzeitig stellt diese Randbedingungskombination die einzige dar, bei der die Eigenwerte im Bereich $1 < \lambda < 2$ nicht ausschließlich monoton mit dem Kerböffnungswinkel α wachsen. Im Fall eines Risses erhält man immer zwei Eigenwerte, die Spannungen in der

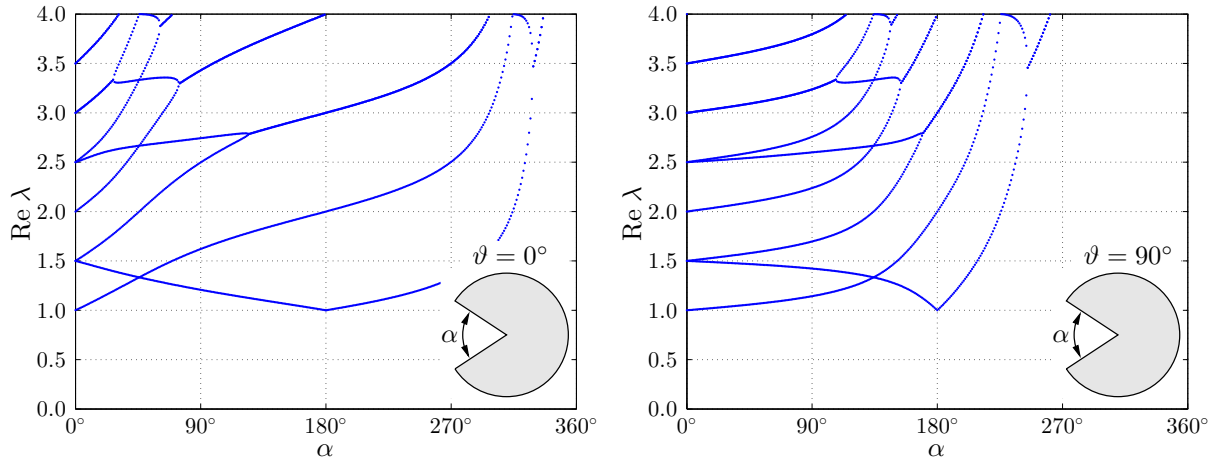


Abb. 4.18: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: G/G

Stärke der klassischen Rissspitzeningularität hervorrufen. Öffnet man den Kerbwinkel $\alpha > 0^\circ$ entstehen sehr starke singuläre Momente da $\lambda \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^\circ} 1$. Die stärkste bei der Platte mögliche Singularität wird jedoch von einem Einzelmoment, das im Ähnlichkeitszentrum der Platte angreift, beschrieben. Das im Ähnlichkeitszentrum angreifende Moment wird in der RFEM durch einen logarithmischen Mode zum Eigenwert $\lambda = 1$ beschrieben. Interessant ist weiter, dass sich die zwei Moden, die zu den stärksten singulären Momenten führen, immer unabhängig von der Materialorientierung beim Eigenwert $\lambda = 1.33$ treffen. Dies ist für die Materialorientierung $\vartheta = 0^\circ$ bei einem Winkel von $\alpha = 45.75^\circ$ der Fall, bei der Konfiguration $\vartheta = 90^\circ$ bei einem Kerböffnungswinkel von $\alpha = 135.00^\circ$. Damit treten ab einem Winkel von $\alpha = 45.75^\circ$ die stärksten singulären Momente im Vergleich zu anderen Konfigurationen bei der Materialkonfiguration $\vartheta = 0^\circ$ auf. Dies ist ein signifikanter Unterschied zu den anderen möglichen Randbedingungskombinationen, wo immer im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ die Materialkonfiguration $\vartheta = 0^\circ$ die stärksten singulären Momente für gleiche Kerbwinkel α hervorruft. Außerdem sei angemerkt, dass für alle Ma-

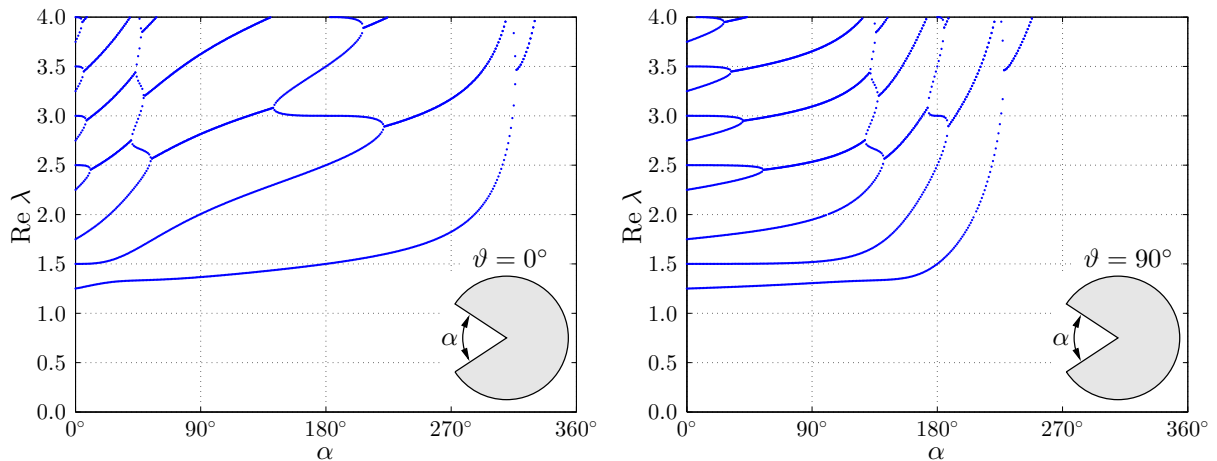


Abb. 4.19: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: G/E

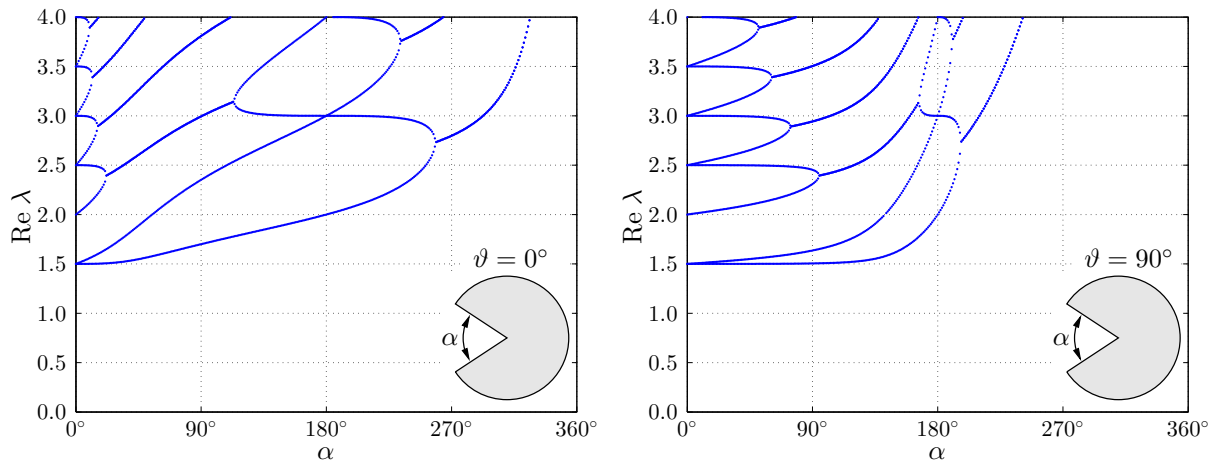


Abb. 4.20: Orthotrope Platte: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: E/E

terialorientierungen ϑ immer bei dem Winkel α im Bereich $45.75^\circ \leq \alpha \leq 135.00^\circ$, der den Treffpunkt der Moden, die zu den stärksten singulären Momenten führen, markiert, für den betragsmäßig drittkleinsten Eigenwert $\lambda_3 = 2$ gilt. D. h. bis zu diesem Winkel α geht auch der drittkleinste Eigenwert λ_3 mit singulären Momenten einher.

In Abb. 4.19 sind die Eigenwertverläufe λ über den Kerböffnungswinkeln α für die Randbedingungen gelenkig gelagert/eingepannt aufgezeichnet. Man erhält wie für die Randbedingungen frei/gelenkig gelagert aus Abb. 4.16 im Fall eines Risses drei Moden zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1.5$ und $\lambda_3 = 1.75$, die singuläre Momente hervorrufen. Alle Eigenwerte im Bereich $1 < \lambda < 2$ sind reell. Bis zu Kerbwinkeln $\alpha < 180^\circ$ treten die stärksten singulären Momente bei der Konfiguration $\vartheta = 90^\circ$ auf und sind darüber hinaus bei allen Materialorientierungen stärker als die klassische Rissspitzensingularität. Für Winkel $\alpha > 180^\circ$ dagegen ist die Konfiguration mit der Materialorientierung $\vartheta = 0^\circ$ als am kritischsten anzusehen.

Abschließend sind in Abb. 4.20 die Exponenten λ für eingespannte Rissufer bzw. Kerbflanken aufgetragen. Im Fall eines Risses treten wie bei freien Rändern zwei Moden mit der klassischen Rissspitzensingularität auf. Allerdings treten im Gegensatz nur bis zu einem Winkel von $\alpha = 140.63^\circ$ bei der Materialorientierung $\vartheta = 90^\circ$ zwei Moden auf, die zu singulären Momenten führen. Darüber hinaus tritt bis zum Kerbwinkel $\alpha = 180^\circ$ ein Eigenwert $\lambda < 2$ und somit nur ein singuläres Moment auf. Überraschend ist, dass bei der Kombination zweier eingespannter Ränder überhaupt singuläre Momente und damit Spannungssingularitäten entstehen. Allerdings ist dieser Fall auf Grund der Stärken der auftretenden Singularitäten und auf Grund des kleinen Bereichs, in dem diese auftreten, als am wenigsten kritisch anzusehen. In Tab. 4.4 auf der folgenden Seite sind abschließend die kritischen Winkel β_M und β_Q aufgeführt, ab denen singuläre Momente bzw. Querkräfte auftreten. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird zur Darstellung der Winkel β gewählt, der die Platte aufspannt. Der Zusammenhang zwischen dem Kerbwinkel α und dem Winkel β , der den Plattensektor aufspannt, ist durch $\alpha + \beta = 360^\circ$ gegeben.

| Randbedingungen | Winkel | Materialorientierung | |
|-----------------|-----------|-----------------------|------------------------|
| | | $\vartheta = 0^\circ$ | $\vartheta = 90^\circ$ |
| F/F | β_M | 180.000° | 180.00° |
| | β_Q | 33.575° | 118.500° |
| F/G | β_M | 45.835° | 134.000° |
| | β_Q | 33.575° | 118.500° |
| F/E | β_M | 41.100° | 129.125° |
| | β_Q | 18.885° | 86.000° |
| G/G | β_M | 47.750° | 134.125° |
| | β_Q | 32.660° | 117.325° |
| G/E | β_M | 73.275° | 153.000° |
| | β_Q | 45.795° | 134.206° |
| E/E | β_M | 180.000° | 180.000° |
| | β_Q | 67.250° | 150.000° |

Tab. 4.4: Kritische Winkel für Biegemomente β_M und Querkräfte β_Q einer orthotropen Platte bei den Konfigurationen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 90^\circ$

4.5 Singularitätsexponenten des symmetrischen Kreuzverbunds

Im folgenden Kapitel werden die Singularitätsexponenten eines symmetrischen Kreuzverbunds mit dem Layup $[90^\circ/0^\circ]_S$ ermittelt. Die verwendeten Elementformulierungen sind ausführlich dargestellt in [35, 36] und orientieren sich an den Ausführungen in Kapitel 3.3. Alle Schichten des Kreuzverbunds seien dabei aus HM M40, einem Verbund aus Kohlenstofffasern und Epoxidharz, dessen Materialdaten in Tab. 4.3 aus Kapitel 4.4 gegeben sind. Ausgangspunkt der Analysen ist dabei ein kreisförmiges Laminat mit Radius $R = 10\text{mm}$ mit Riss. Anschließend wird der Riss zur Kerbe erweitert und der Kerböffnungswinkel α vergrößert, wobei die sich dann einstellenden Singularitätsexponenten für unterschiedliche Randbedingungen auf den Rissufern bzw. Kerbflanken aufgezeichnet werden. Bei Faser-Kunststoff-Verbunden mit zur Mittelfläche symmetrischem Lagenaufbau verschwinden alle Kopplungsterme zwischen Scheiben- und Plattenverhalten. Sämtliche Kopplungssteifigkeiten B_{ij} aus Gl. (2.3.17) sind null und auch die Randsteifigkeitsmatrizen \mathbf{E}_{Bi} aus Gl. (3.3.6), die die Kopplung der Differentialgleichungen von Scheibe und Platte beschreiben, enthalten nur Nullen als Einträge. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem aus Gl. (3.3.11) zerfällt somit in ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung zur Beschreibung des Scheibenverhaltens sowie ein Differentialgleichungssystem 4. Ordnung zur Beschreibung des Plattenverhaltens. Scheiben- und Plattenverhalten sind somit voneinander entkoppelt und können getrennt voneinander betrachtet werden. Im folgenden Abschnitt werden nun zunächst die Singularitätsexponenten des Scheibenverhalten betrachtet, während in Kapitel 4.5.2 die Singularitätsexponenten des Plattenverhaltens diskutiert werden.

4.5.1 Singularitätsexponenten des Scheibenverhaltens

In den Diagrammen 4.21 bis 4.34 sind die Eigenwerte $\text{Re } \lambda - 1$ der Moden, die dem Scheibenverhalten zugeordnet werden können, als Funktion des Kerböffnungswinkels α für verschiedene Randbedingungen auf den Seitenrändern, die die Kerbflanken bilden, dargestellt. Da für die Verschiebungen ein Lösungsansatz der Form $u = \xi^{\lambda-1}\psi$ gewählt wird, klingen sowohl die Normalkräfte als auch die Spannungen mit $\sigma_{ij} \sim r^{\text{Re } \lambda - 2}$ ab. Ein Realteil $\text{Re } \lambda - 1 = 0.5$ beschreibt dabei gerade die "klassische" $r^{-1/2}$ -Rissspitzensingularität, die bei einem Riss in einer unendlich ausgedehnten Scheibe homogenen Materials vorkommt. Singularitätsexponenten mit $\text{Re } \lambda - 1 < 0.5$ beschreiben stärkere Singularitäten als die klassische Rissspitzensingularität, wobei aus Sicht des Anwenders im schlimmsten Fall Singularitäten vom Typ $\sigma_{ij} \sim r^{-1}$ auftreten können. Gilt $\text{Re } \lambda - 1 > 1$ weisen die Spannungen kein singuläres Verhalten mehr auf. In allen untersuchten Laminatkonfigurationen liegen sowohl reelle als auch komplexe Exponenten vor, wobei letztere immer als konjugiert komplexes Paar auftreten. Die Realteile der Eigenwerte $\text{Re } \lambda - 1$ sind in blau dargestellt, bei konjugiert komplexen Eigenwerten ist der Imaginärteil $\text{Im } \lambda$ rot dargestellt. Der Übersichtlichkeit wegen wird dabei nur der positive Imaginärteil ausgewiesen.

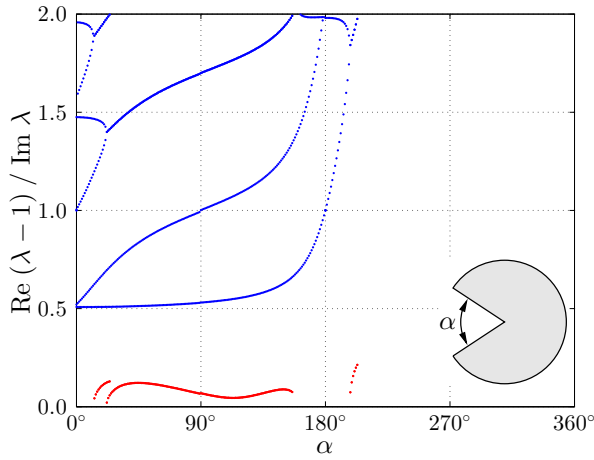


Abb. 4.21: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
Randbedingungen: frei / frei

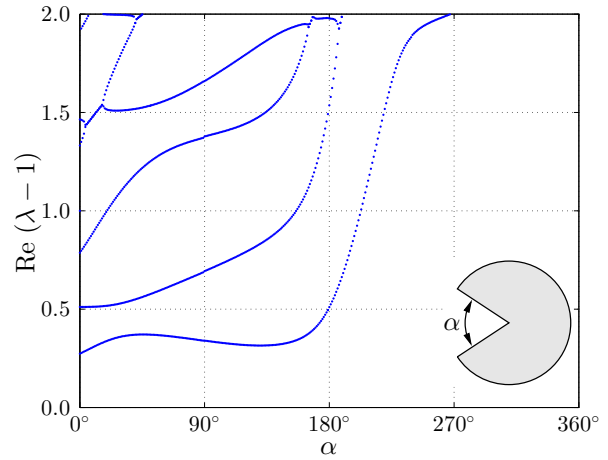


Abb. 4.22: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: frei / $u_r = 0$

In Abb. 4.21 sind die Eigenwerte für den Fall dargestellt, dass sich beide Rissufer bzw. Kerbflanken frei bewegen können. Im Fall eines geraden Risses ($\alpha = 0^\circ$) treten bei einem symmetrischen Kreuzverbund wie bei der homogenen Scheibe zwei Moden mit der klassischen $r^{-1/2}$ -Rissspitzensingularität auf. Der zur unteren Kurve gehörende Deformationsmode, der die stärkere Spannungssingularität hervorruft, beschreibt eine zum Riss symmetrische Öffnung, also eine Modus-*I*-Rissöffnung. Die darüber liegende Kurve beschreibt eine zur x -Achse asymmetrische Relativverschiebung der Rissufer, die als Modus-*II*-Rissöffnung bezeichnet wird. In Abb. 4.23 und 4.24 sind die Deformationsmoden für die zwei unterschiedlichen Bruchmoden bei einem Kerbwinkel von $\alpha = 30^\circ$ dargestellt. Für diesen Winkel ist der zum Modus *II* gehörende Eigenwert $\lambda_2 - 1 = 0.757$ bereits deutlich größer als der mit Modus *I* in Relation stehende Eigenwert $\lambda_1 - 1 = 0.511$. Die Spannungssingularität ist folglich im Fall eines Risses für beide Moden gleich stark, während sie mit steigendem Winkel α für den Modus *II* geringer ausfällt als für Modus *I*. Ab

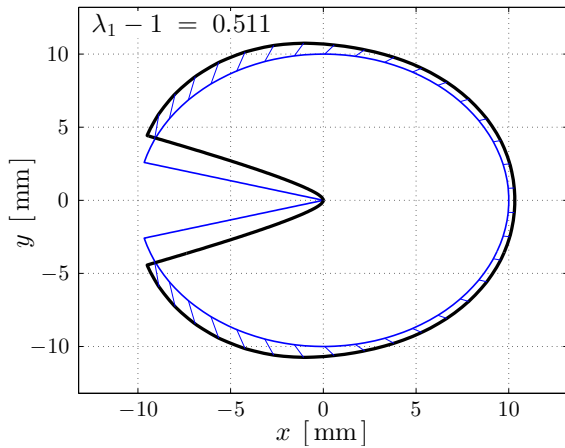


Abb. 4.23: Eigenmode zu $\lambda_1 - 1$
Randbedingungen: frei / frei

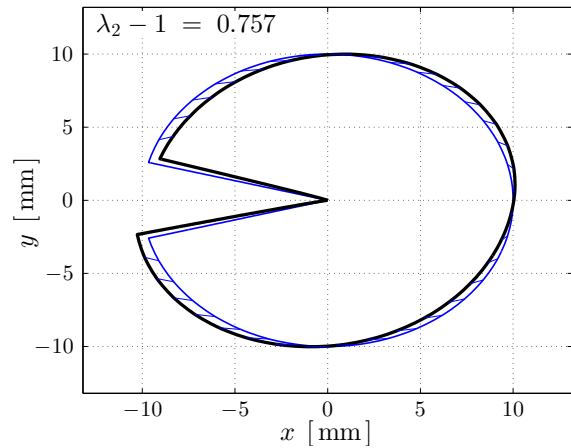


Abb. 4.24: Eigenmode zu $\lambda_2 - 1$
Randbedingungen: frei / frei

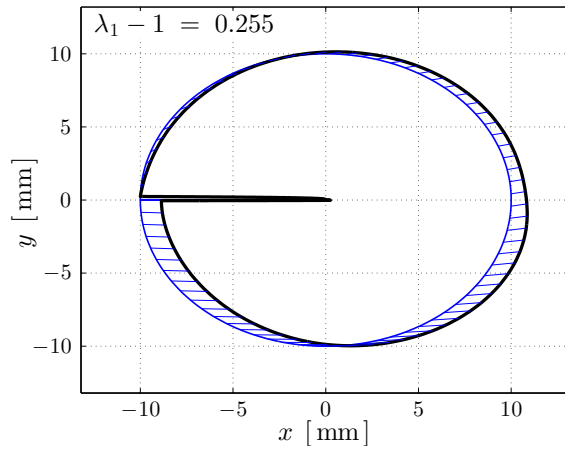


Abb. 4.25: Eigenmode zu $\lambda_1 - 1$
RBen: frei / $u_r = 0$

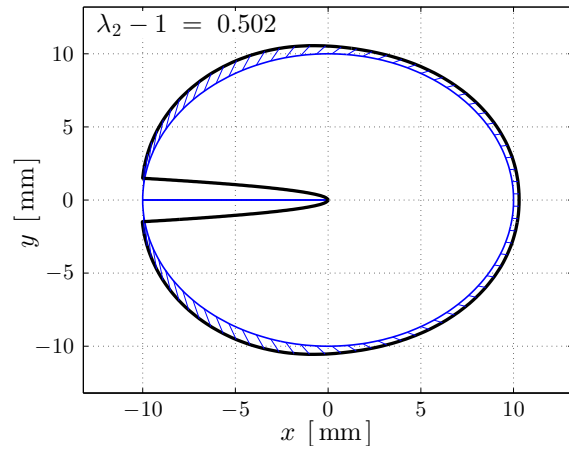


Abb. 4.26: Eigenmode zu $\lambda_2 - 1$
RBen: frei / $u_r = 0$

$\alpha = 90^\circ$ geht nur noch der Modus *I* mit einer Spannungssingularität einher, bis bei einem Winkel $\alpha = 180^\circ$ die Spannungen kein singuläres Verhalten mehr aufweisen.

In Abb. 4.22 sind die Verläufe der Eigenwerte über dem Kerböffnungswinkel α abgebildet, die sich ergeben, wenn auf einer Kerbflanke die Verschiebung in radialer Richtung $u_r = 0$ festgehalten wird. Die Verschiebungen auf der anderen Kerbflanke können sich im Gegensatz dazu frei einstellen. Im Fall eines Risses liegen drei Deformationsmoden vor, die zu singulären Spannungen führen. Im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ liegt dabei eine Supersingularität $\text{Re } \lambda - 1 < 0.5$ vor. Interessant ist weiter, dass auf Grund der gewählten Randbedingungen, dann die ursprünglich asymmetrische Rissöffnung, die bei freien Rissufern als Modus *II* bezeichnet wird, zu stärkeren Singularitäten führt als die symmetrische Rissöffnung. Die Deformationsmoden sind in den Abbildungen 4.25 und 4.26 für eine Diskretisierung mit 75 Elementen dargestellt. Bei der asymmetrischen Rissöffnung ist der Exponent $\text{Re } \lambda_1 - 1 = 0.255$, damit folgt für die Spannungen ein singuläres Verhalten von $\sigma_{ij} \sim \xi^{-0.745}$. Die symmetrische Rissöffnung wird durch die Randbedingung $u_r = 0$ auf einer Kerbflanke kaum beeinflusst. Der auch als Modus-*I*-Öffnung bezeichnete Deformationsmode weist im Fall eines Risses weiterhin die klassische Rissspitzensingularität $\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$ auf.

In der Abbildung 4.27 ist der Verlauf der Exponenten $\text{Re } \lambda - 1$ über dem Kerbwinkel α dargestellt, wenn sich ein Rand des Rissufers frei bewegen kann, während bei dem anderen Rissufer die Verschiebung in Umfangsrichtung $u_\varphi = 0$ festgehalten wird. Wie bei der Kombination der Randbedingungen frei/ $u_r = 0$ treten für einen geraden Riss drei Deformationsmoden auf, die zu Singularitäten führen und die die gleiche Stärke aufweisen, wie die Singularitäten in Abb. 4.22. Im Gegensatz dazu wird durch die Kombination der Randbedingungen frei/ u_φ für einen geraden Riss $\alpha = 0^\circ$ die Modus-*II*-Rissöffnung nicht beeinflusst. Sie weist weiter die klassische Rissspitzensingularität $\sigma_{ij} \sim r^{-1/2}$ auf. Da sich der Riss in Umfangsrichtung nicht mehr symmetrisch öffnen kann, ist die Singularität dieses Modes signifikant stärker, für einen Riss gilt für die Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$. Sowohl bei den Randbedingungen frei/ $u_r = 0$ auf den Kerbflanken als auch bei der Kombination

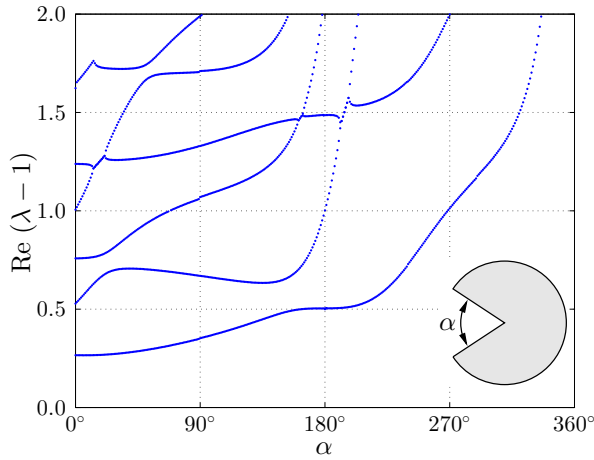


Abb. 4.27: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: frei / $u_\varphi = 0$

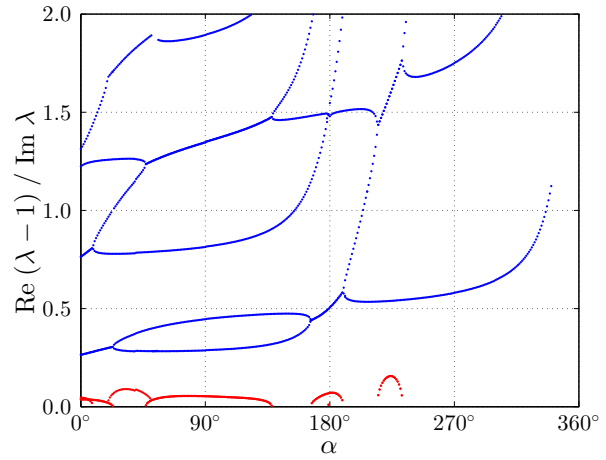


Abb. 4.28: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: frei / fest

frei/ $u_\varphi = 0$ tritt bei einem Riss ein dritter Deformationsmode auf, der zu singulären Spannungen führt. Allerdings ist die Singularität dieses dritten Modes deutlich schwächer, als die der anderen singulären Moden, für einen Riss gilt für die beiden genannten Randbedingungskombinationen $\text{Re } \lambda_3 = 0.75$.

Kann sich eine Kerbflanke frei bewegen, während bei der anderen die Verschiebungen in Umfangsrichtung sowie in radialer Richtung unterbunden sind, diese Kerbflanke also fest fixiert ist, erhält man den in Abb. 4.28 gegebenen Verlauf der Exponenten λ . Für einen geraden Riss tritt ein konjugiert komplexer Exponent $\lambda_{1,2} - 1 = 0.25 \pm 0.03i$ auf. Die Spannungen oszillieren folglich. Mit öffnendem Kerbwinkel wird diese Singularität schwächer sowie der Imaginärteil kleiner. An der Übergangsstelle von konjugiert komplexem Exponent zu zwei reellen Exponenten bei $\alpha_1 = 21.0^\circ$ tritt schließlich eine logarithmische Singularität auf. Für die Spannungen gilt hier $\sigma_{ij} \sim r^{-0.707} \ln r$. Ebenfalls logarithmische Singularitäten treten beim Übergang zweier reeller Eigenwerte zu einem konjugiert komplexen bei $\alpha_2 = 167.25^\circ$: $\text{Re } \lambda - 1 = 0.440$, sowie umgekehrt von einer komplexen zu zwei reellen bei $\alpha_3 = 189.25^\circ$: $\text{Re } \lambda_3 - 1 = 0.581$ auf. Dempsey und Sinclair haben sich in ihren Arbeiten [31–33] mit dem Auftreten logarithmischer Spannungssingularitäten befasst. Sie verwenden zur Analyse logarithmischer Singularitäten Airysche Spannungsfunktionen und geben Bedingungen für das Auftreten logarithmischer Singularitäten bei Multimaterialverbindungen im ebenen Fall an. So treten diese in der Regel wie in diesem Fall an den Übergangsstellen einer konjugiert komplexen Lösung zu zwei reellen auf. Die Untersuchung logarithmischer Singularitäten ist laut Dempsey [32] von besonderer Bedeutung, da eine logarithmische Singularität $\sigma_{ij} \sim r^{\text{Re } \lambda - 2} \ln r$ stärker ist als eine reelle $\sigma_{ij} \sim r^{\text{Re } \lambda - 2}$. Sator [76] relativiert diese Aussage. Da bei der Untersuchung von Singularitäten diese immer in Abhängigkeit z. B. wie in diesem Fall von einem Winkel oder auch bestimmter Materialkennwerte wie dem E-Modul-Verhältnis bei Bi-Material-Verbunden dargestellt werden, handelt es sich bei diesen Übergangsstellen, an denen logarithmische Singularitäten auftreten, im Allgemeinen um isolierte Punkte. Laut Sator [76] lässt sich in diesen Fällen immer in direkter Umgebung ein Exponent λ finden, dessen Realteil zu

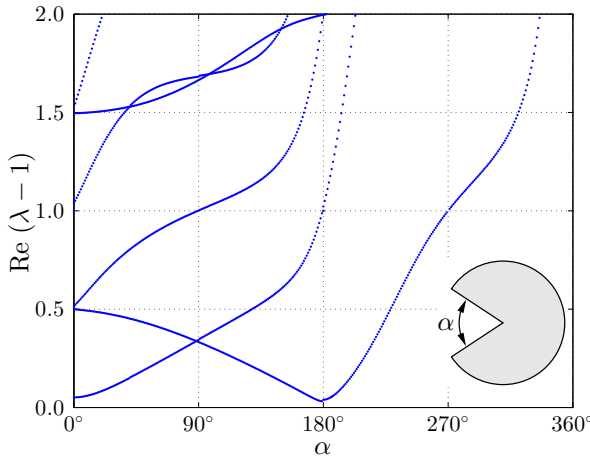


Abb. 4.29: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: $u_r = 0$ / $u_r = 0$

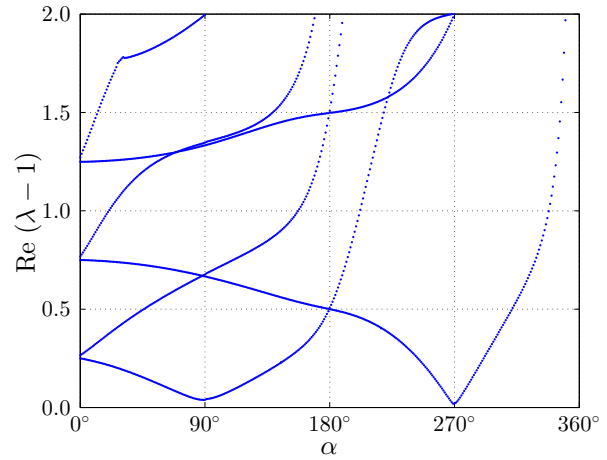


Abb. 4.30: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: $u_r = 0$ / $u_\varphi = 0$

einer gewöhnlichen reellen Singularität führt, die stärker als die logarithmische ist.

In Abb. 4.29 sind die Exponentenverläufe aufgetragen, die sich ergeben, wenn die Verschiebungen auf beiden Rissufern bzw. Kerbflanken in radialer Richtung festgehalten werden. Für einen Riss treten zwei Deformationsmoden mit der klassischen Rissspitzensingularität $\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$ auf. Dies überrascht, da durch die in radialer Richtung vorgegebenen Verschiebungen die Modus-II-Rissöffnung verhindert wird. Beide Deformationsmoden, die zur klassischen Rissspitzensingularität gehören, gehen dann auch mit einer Rissöffnung in Umfangsrichtung einher. Außerdem tritt für $\alpha = 0^\circ$ eine Starrkörperverschiebung senkrecht zum Riss auf, die durch den Exponent $\lambda_1 - 1 = 0$ beschrieben wird. Ebenfalls eine Starrkörperverschiebung in horizontaler Richtung tritt bei $\alpha = 180^\circ$ auf. In den Bereichen für $\alpha \rightarrow 0^\circ$ und $\alpha \rightarrow 180^\circ$, in denen diese Starrkörperverschiebungen noch verhindert werden, führen diese Moden zu besonders starken Spannungssingularitäten. So treten im Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 228.42^\circ$ Eigenwerte λ auf, die zu Singularitäten führen, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität sind. Gilt $\alpha \geq 270^\circ$ treten keine singulären Spannungen mehr auf.

In Abb. 4.30 sind die Eigenwerte λ dargestellt, wenn die eine Kerbflanke in radialer, die andere in Umfangsrichtung festgehalten wird. Es treten zwei Moden auf, die mit den besonders starken singulären Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ einhergehen. Dies ist zu erwarten, wenn man die Verläufe aus Abb. 4.30 mit denen aus Abb. 4.22, wo die Kombination frei/ $u_r = 0$ vorliegt, vergleicht. Ähnliches gilt für den Vergleich mit den Verläufen aus Abb. 4.27, in denen die Kombination frei/ $u_\varphi = 0$ dargestellt wird. Man stellt in diesem Fall fest, dass sobald die Verschiebung in Umfangsrichtung festgehalten wird, die symmetrische Rissöffnung beeinflusst wird und dann statt der klassischen Rissspitzensingularität, die normalerweise mit der Modus-I-Öffnung einhergeht, stärkere Singularitäten auftreten. Wird die radiale Verschiebung auf einer der Kerbflanken zu Null gesetzt, erhält man beim Schubmodus eine stärkere Singularität. Bei der Kombination $u_r = 0/u_\varphi = 0$ treten folglich zwei Supersingularitäten $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ für $\alpha = 0^\circ$ auf. Immer wenn die Kerbflanken recht-

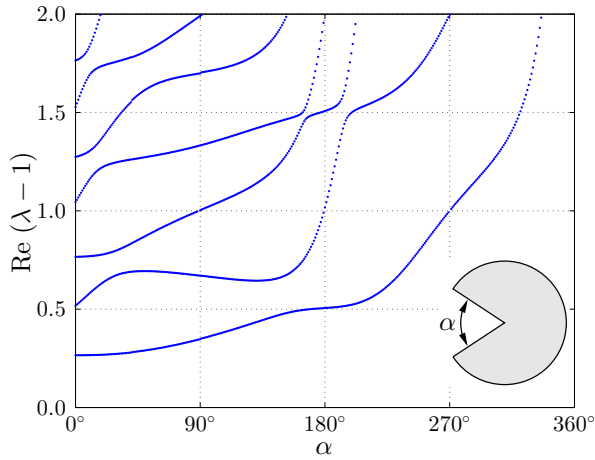


Abb. 4.31: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: $u_r = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$

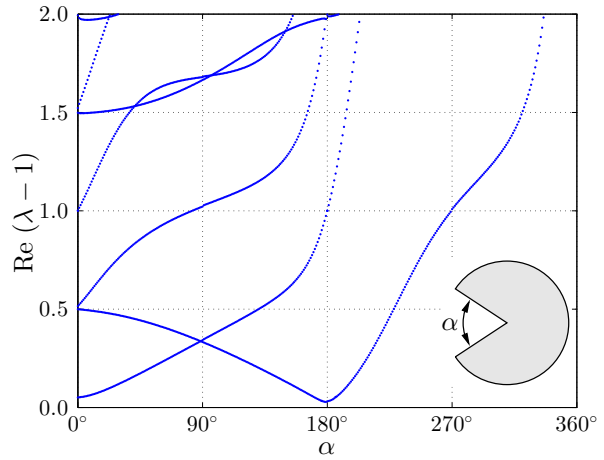


Abb. 4.32: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: $u_\varphi = 0$ / $u_\varphi = 0$

winklig aufeinandertreffen, treten außerdem Starrkörperverschiebungen auf. Dies ist bei $\alpha = 90^\circ$ sowie bei $\alpha = 270^\circ$ der Fall. Auch hier führen in den Bereichen, in denen die Rissufer noch nicht exakt rechtwinklig zueinander stehen und die Starrkörperverschiebungen gerade noch verhindert werden, diese Moden zu besonders starken singulären Spannungen. In Abb. 4.31 sind die Verläufe der Eigenwerte $\text{Re } \lambda - 1$ für den Fall, dass ein Rand in radialer Richtung festgehalten wird und der andere fest eingespannt ist, dargestellt. Auffallend ist, dass die Kurven, die zu den zwei Exponenten mit den kleinsten Realteilen gehören und die zu den stärksten Singularitäten führen, den Verläufen aus Abb. 4.27 fast entsprechen. Die Randbedingung $u_r = 0$ auf beiden Kerbflanken übt folglich keinen signifikanten Einfluss auf den Verlauf der Singularität aus. Ähnlich verhalten sich auch die Verläufe aus Abb. 4.22 zu denen aus Abb. 4.33. Hier besteht der Unterschied in den

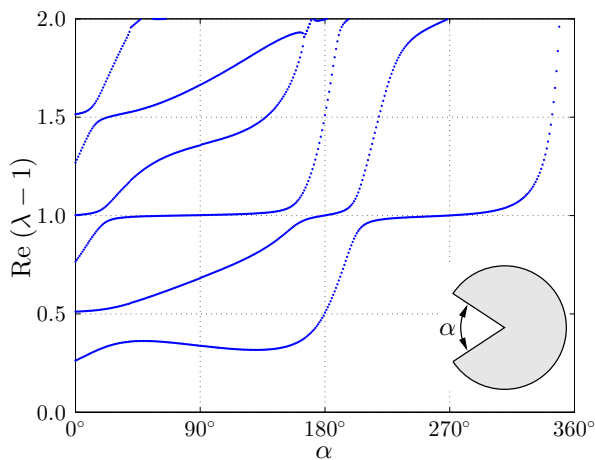


Abb. 4.33: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RBen: $u_\varphi = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$

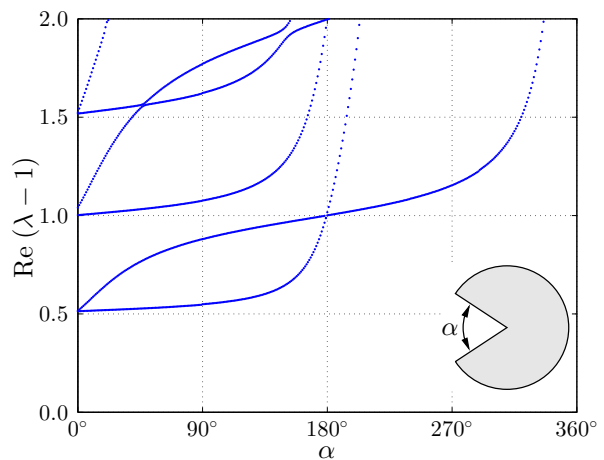


Abb. 4.34: Singularitätsexponent $\lambda - 1$
RB: $u_r = u_\varphi = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$

Randbedingungen darin, dass bei Abb. 4.33 beide Ränder zusätzlich in Umfangsrichtung festgehalten werden, während bei Abb. 4.22 sich der eine Rand sich frei bewegen kann, während die Bewegung des anderen in radialer Richtung zu Null gesetzt wird. Die Exponentenverläufe aus Abb. 4.32 und Abb. 4.29 entsprechen wiederum einander. Allerdings treten bei der Randbedingungskombination $u_r = 0/u_r = 0$ in Abb. 4.29 nur Moden auf, die eine symmetrische Rissöffnung beschreiben. Im Gegensatz dazu treten im Fall, dass beide Kerbflanken in Umfangsrichtung festgehalten werden, nur Schubdeformationsmoden auf. In beiden Randbedingungskombinationen tritt im Fall eines Risses neben den zwei Deformationsmoden, die mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen, eine Starrkörperverschiebung auf.

In Abb. 4.34 sind die Exponenten dargestellt, die man erhält, wenn beide Rissufer fest eingespannt sind. Interessant dabei ist, dass man wiederum zwei Deformationsmoden erhält, die mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen. Erst für Winkel $\alpha \geq 180^\circ$ führen diese beiden Moden zu nichtsingulären Spannungen und damit auch zu keinen singulären Normalkräften mehr. In Tab. 4.5 sind schließlich die kritischen Winkel α_N aufgeführt, bis zu denen bei den unterschiedlichen Randbedingungskombinationen auf den Seitenrändern singuläre Normalkräfte bzw. Spannungen auftreten.

| Randbedingungen | β_N | Randbedingungen | β_N |
|---|-----------|---|-----------|
| frei / frei | 180.0° | frei / $u_r = 0$ | 157.2575° |
| frei / $u_\varphi = 0$ | 90.9270° | frei / $u_r = u_\varphi = 0$ | 23.7080° |
| $u_r = 0$ / $u_r = 0$ | 90.0° | $u_r = 0$ / $u_\varphi = 0$ | 21.9600° |
| $u_r = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$ | 90.0° | $u_\varphi = 0$ / $u_\varphi = 0$ | 90.0° |
| $u_\varphi = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$ | 90.0° | $u_r = u_\varphi = 0$ / $u_r = u_\varphi = 0$ | 180.0° |

Tab. 4.5: Kritische Winkel für Normalkräfte β_N beim symmetrischen Kreuzverbund aus HM M40

4.5.2 Singularitätsexponenten des Plattenverhaltens

In den Abb. 4.35 bis 4.42 sind die Verläufe der Eigenwerte λ_i , die zu den Deformationsmoden gehören, die die Biegebeanspruchung beschreiben, für einen symmetrischen Kreuzverbund $[90^\circ/0^\circ]_S$ dargestellt. Biege- und Drillmomente sind proportional zur 2. Ableitung bezüglich ξ bzw. r . Das heißt, dass Deformationsmoden zu Eigenwerten im Bereich $1 < \lambda < 2$ zu singulären Momenten und damit singulären Spannungen σ_n, σ_t und τ_{nt} führen. Exponenten im Bereich $1 < \lambda < 3$ führen zu singulären Querkraften und damit singulären Schubspannungen τ_{nz} , da die Querkraften Q proportional zur dritten Ableitung bezüglich ξ sind ($Q \sim \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} w$). Dabei muss beachtet werden, dass die Querkraften und damit die Schubspannungen aus Gleichgewichtsbetrachtungen am infinitesimalen Element resultieren. Das Diagramm in Abb. 4.35 zeigt die Eigenwerte λ_i , die die Deformationen beschreiben, wenn beide Seitenflächen des Risses bzw. der Kerbe sich frei bewegen können. In blau sind die Realteile der Eigenwerte dargestellt, in rot die Imaginärteile bei konjugiert komplexen Eigenwerten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nur der positive Imaginärteil eines konjugiert komplexen Eigenwerts aufgeführt. Im Fall eines Risses für $\alpha = 0^\circ$ treten zwei Deformationsmoden mit $\lambda_{1,2} = 1.5$ auf. Beide Moden führen damit zu singulären Spannungen in der Stärke der klassischen Risspitzensingularität ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$), wie man sie aus dem ebenen Fall kennt. Die Kurve, die zum Eigenwert λ_1 mit dem kleinsten Realteil gehört, beschreibt einen zum Riss symmetrischen Deformationsmode, wie er durch ein Biegemoment M_n hervorgerufen wird. Der zweite Deformationsmode, der im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zu singulären Momenten führt, ist asymmetrisch zur Rissöffnung und beschreibt Deformationen, die durch ein Drillmoment hervorgerufen werden. In den Abb. 4.37 und Abb. 4.38 sind für den Kerböffnungswinkel $\alpha = 30^\circ$ die Eigenmoden dargestellt, die zu singulären Momenten führen. Für Winkel $\alpha > 180^\circ$ treten keine singulären Momente mehr auf. Daneben gibt es noch vier Moden, die bei einem Riss zu singulären Querkraften

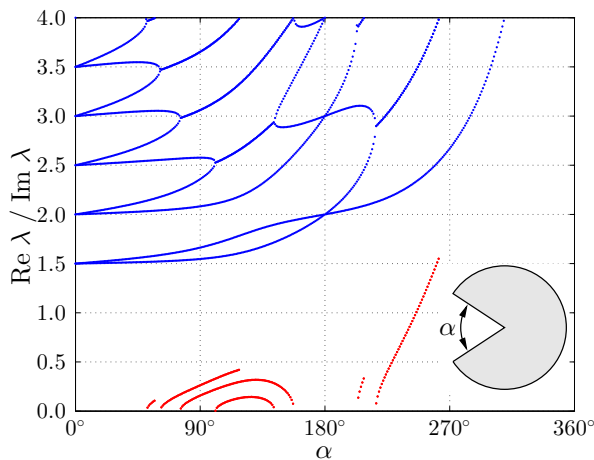


Abb. 4.35: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/F

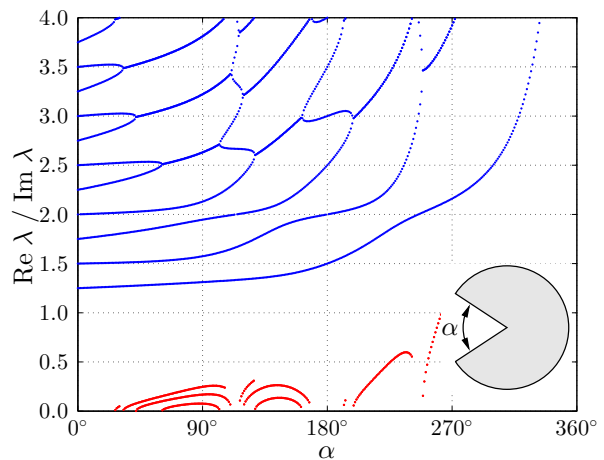


Abb. 4.36: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/G

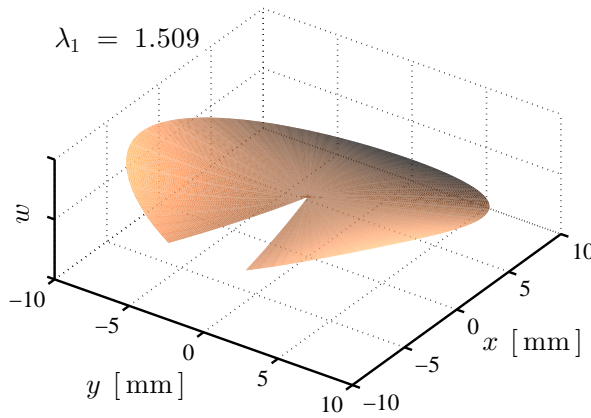


Abb. 4.37: Mode sym. Rissöffnung
Randbedingungen: F/F

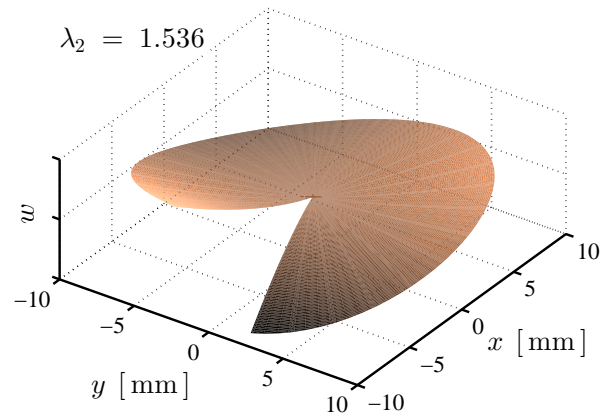


Abb. 4.38: Mode asym. Rissöffnung
Randbedingungen: F/F

ten führen. Singuläre Querkräfte treten bis zu einem Winkel von $\alpha_Q = 284.80^\circ$ auf. Sie treten also auch bei Winkeln auf, die größer als die einer gewöhnlichen Kerbe ($\alpha < 180^\circ$) sind. Eine Übersicht über die Winkel, bis zu denen singuläre Momente oder Querkräfte für unterschiedliche Randbedingungskombinationen auf den Seitenrändern auftreten, ist in Tab. 4.6 am Ende dieses Kapitels aufgeführt.

In Abb. 4.36 sind die Eigenwerte über dem Winkel α dargestellt, die man erhält, wenn die eine Kerbflanke frei, die andere gelenkig gelagert ist. Im Fall eines Risses treten drei Moden auf, die zu singulären Momenten führen. Wobei die stärkste Singularität mit $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ deutlich stärker ist, als die klassische Rissspitzensingularität bei freien Seitenflächen. Das Ergebnis ist insoweit von technischer Bedeutung, da die untersuchte Situation nicht nur von akademischer Bedeutung ist, sondern solche Situationen auch in der Realität leicht eintreten können. Zum Beispiel können bei der Montage oder dem unsachgemäßen Einbau eines Faser-Kunststoff-Verbunds feine Risse an der Lagerung verursacht werden. Außerdem treten im Allgemeinen große Kräfte und Momente bei der Krafteinleitung oder der Aufnahme eines Bauteils auf und somit auch an seiner Lagerung. Die Entstehung von Rissen ist also dort am wahrscheinlichsten. Dass ein Riss an einem gelenkig gelagerten Laminat dann als signifikant kritischer zu bewerten ist, als an anderer Stelle im Laminat überrascht und ist konstruktiv zu berücksichtigen. Darüber hinaus ist im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ die höchste auftretende Singularität bei der Randbedingungskombination frei/gelenkig gelagert stärker als die klassische Rissspitzensingularität. Für einen geraden Rand ($\alpha = 180^\circ$) beim Übergang von einem gelenkig gelagerten zu einem freien Rand tritt die gleiche Singularität auf, wie bei einem Riss ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$). Erst für Winkel $\alpha > 245.7^\circ$ treten keine singulären Momente mehr in Erscheinung. Außerdem gibt es im Fall eines Risses fünf Moden, die zu singulären Querkräften führen. An den Übergangsstellen von zwei reellen Eigenwerten zu einem konjugiert komplexen Eigenwert bei $\alpha = 61.0^\circ$ ($\lambda_1 = 2.51$) und $\alpha_3 = 127.75^\circ$ ($\lambda_3 = 2.60$) bzw. beim Übergang eines konjugiert komplexen Exponenten zu zwei reellen bei $\alpha_2 = 102.4^\circ$ ($\lambda_2 = 2.71$) und $\alpha_4 = 161.83^\circ$ ($\lambda_4 = 2.99$) treten jeweils logarithmische Singularitäten in den Querkräften auf.

Ist eine Kerbflanke frei, die andere fest eingespannt, erhält man den in Abb. 4.39 über dem

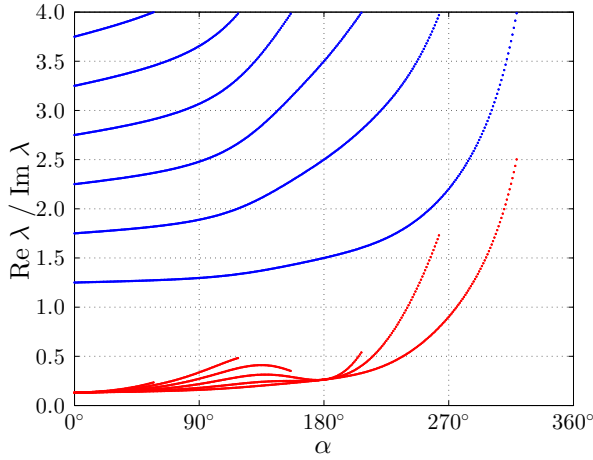


Abb. 4.39: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: F/E

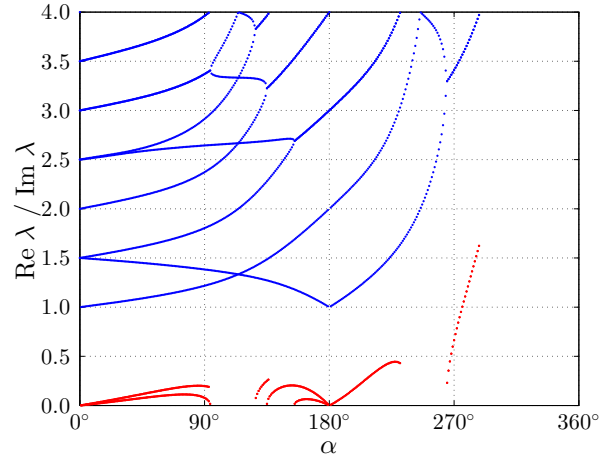


Abb. 4.40: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: G/G

Winkel α dargestellten Verlauf für die Eigenwerte. Alle Eigenwerte, die zu Singularitäten bei den Momenten und Querkraften führen sind konjugiert komplex. Damit oszillieren die Verschiebungen in Richtung der Plattendicke. Im Gegensatz zum Scheibenverhalten führen Oszillationen der Verschiebungen bei der Platte nicht zu einer physikalisch nicht möglichen Durchdringung der Rissufer. Im Fall eines Risses gilt für die Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$. Damit ist auch im kritischsten Fall bei einem Riss für die Kombination der Randbedingungen auf den Seitenrändern frei / eingespannt die maximal auftretende Singularität signifikant stärker als bei einem Riss mit freien Rändern im Laminat. Genau wie im Fall der Kombination frei / gelenkig gelagert ist im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ die maximal auftretende Singularität stärker als bei einem Riss im Laminat. An einem geraden Rand $\alpha = 180^\circ$ am Übergang von einem eingespannten zu einem freien Rand, tritt die gleiche Singularität auf wie bei einem Riss. Mit größer werdendem Kerböffnungswinkel α nimmt die Singularität ab. Die Realteile der Eigenwerte λ_i , die zu singulären Momenten führen, wachsen monoton mit größer werdendem Winkel α .

Anders verhalten sich die Eigenwerte, wenn beide Kerbränder gelenkig gelagert sind, wie in Abb. 4.40 aufgezeichnet. Für den Riss treten zwei Deformationsmoden auf, die mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen. Der dritte Mode $\lambda = 1$ kennzeichnet eine Starrkörperrotation um eine Achse parallel zum Riss. Vergrößert man nun den Winkel α , nehmen die Realteile der Eigenwerte zu. Ein Eigenwert jedoch nimmt von $\lambda = 1.5$ bei $\alpha = 0^\circ$ ausgehend ab und beschreibt schließlich bei $\alpha = 180^\circ$ eine Starrkörperrotation ($\lambda = 1$) um die y -Achse. Für Winkel $\alpha \leq 223.38^\circ$ treten Singularitäten auf, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität sind, wobei bis zu einem Winkel $\alpha = 263.23^\circ$ generell singuläre Momente auftreten.

Abschließend sind in Abb. 4.41 die Verläufe für die Kombination einer gelenkig gelagerten Kerbflanke mit einer eingespannten dargestellt und in Abb. 4.42 die Eigenwertverläufe für den Fall, dass beide Kerbflanken eingespannt sind. Dabei überrascht vor allem, dass selbst in dem Fall, wenn beide Kerbflanken eingespannt sind, singuläre Spannungen ent-

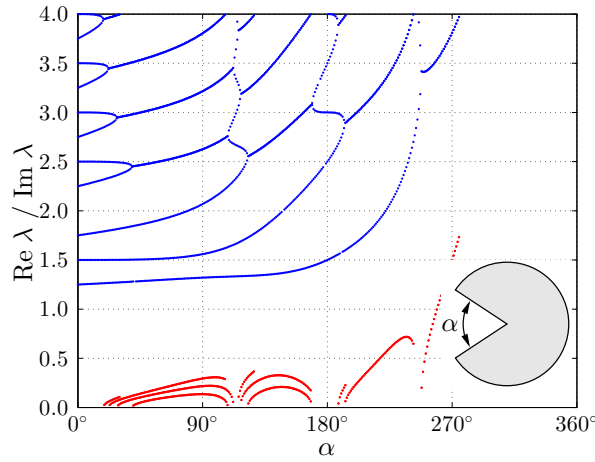


Abb. 4.41: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: G/E

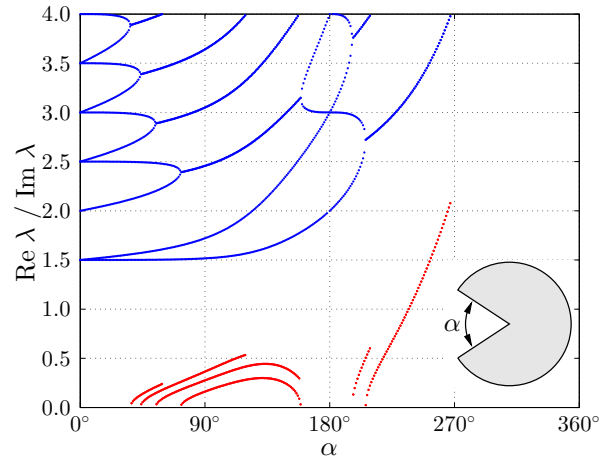


Abb. 4.42: Singularitätsexponent λ
Randbedingungen: E/E

stehen können. Diese sind im Fall eines Risses als genauso kritisch anzusehen wie die Risspitzensingularität im Laminat mit freien Rissufern. Erst für Winkel $\alpha \geq 180^\circ$ sind die Spannungen nicht mehr singulär.

Abschließend lassen sich folgende Charakteristika für Lamine mit symmetrischem Layup aus orthotropem Material festhalten. Sind die Randbedingungen auf beiden Rissufern bzw. Kerbflanken gleich, also für die Kombinationen frei / frei, gelenkig gelagert / gelenkig gelagert und eingespannt / eingespannt, treten immer zwei Moden zum Eigenwert $\lambda = 1.5$ auf. Diese Moden führen zu der klassischen Risspitzensingularität mit Spannungen $\sigma_{ij} = r^{-0.5}$. Wobei der Mode, der mit größer werdendem Winkel α den kleineren Realteil aufweist und somit zu stärkeren Spannungssingularitäten führt, immer eine zum Riss symmetrische Rissöffnung beschreibt. Die andere, schwächere Singularität kennzeichnet dagegen einen Deformationsmode, der eine zum Riss asymmetrische Rissöffnung beschreibt. Sind die Randbedingungen auf den Seitenrändern unterschiedlich, also für die Kombinationen frei / gelenkig gelagert, frei / eingespannt und gelenkig gelagert / eingespannt, tritt für einen geraden Riss immer als kleinster Eigenwert $\lambda = 1.25$ auf. Für die Spannungen folgt somit $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$, sie weisen somit ein stärker singuläres Verhalten auf als in den drei anderen Randbedingungskombinationen. Einen Sonderfall stellt das Laminat mit Riss dar, dessen beide Rissufer gelenkig gelagert sind. Für einen geraden Riss, kann sich dann die Platte um diesen drehen. Mit dieser Starrkörperrotation des Laminats sind natürlich keine Deformationen und somit auch keine Spannungen verbunden. Wird der Riss nun geöffnet, entstehen Spannungssingularitäten, die stärker sind als die eben beschriebenen. Es gilt folglich $\text{Re}\lambda < 1.25$. Auch ist die Randbedingung gelenkig gelagert / gelenkig gelagert die einzige, bei der die Eigenwerte mit größer werdendem Winkel α nicht nur monoton wachsen, sondern auch für einen Deformationsmode kleiner werden, wodurch stärkere Spannungssingularitäten hervorgerufen werden. Ansonsten gilt, dass die Spannungssingularitäten, die zu den Biege- und Drillmomenten gehören, mit größer werdendem Winkel α monoton fallen. In Tab. 4.6 sind für die verschiedenen untersuchten Konfigurationen

die Winkel α dargestellt, die den Übergang von singulären zu regulären Momenten bzw. Querkräften markieren. Aus Tab. 4.6 kann man entnehmen, dass bei Biegung nur für die Randbedingungskombinationen frei / gelenkig gelagert, frei / eingespannt, gelenkig gelagert / gelenkig gelagert sowie gelenkig gelagert / eingespannt singuläre Spannungen für Winkel $\alpha > 180^\circ$ auftreten. Dieses Verhalten wurde für isotrope Platten bereits im Jahr 1952 von Williams [105] ausgewiesen und lässt sich auf die hier untersuchten symmetrischen orthotropen Materialverbunde übertragen.

| Randbedingungen | Kritische Winkel | |
|-----------------|------------------|------------|
| | α_M | α_Q |
| F/F | 180.0° | 284.8015° |
| F/G | 245.7000° | 318.1725° |
| F/E | 256.7050° | 300.9125° |
| G/G | 245.7050° | 263.2340° |
| G/E | 222.0725° | 245.7055° |
| E/E | 180.0° | 227.5175° |

Tab. 4.6: Kritische Winkel für Momente α_M und Querkräfte α_Q beim symmetrischen Kreuzverbund aus HM M40

4.6 Singularitätsexponenten des unsymmetrischen Kreuzverbunds

Im folgenden Kapitel werden die Singularitätsexponenten eines einfachen Kreuzverbunds mit Layup $[0^\circ/90^\circ]$ betrachtet. Die einzelnen Schichten des Kreuzverbunds seien aus HM M40, dessen Materialeigenschaften in Tab. 4.3 aufgeführt sind. Der $[0^\circ/90^\circ]$ -Kreuzverbund weist Biege-Dehnpkopplungen auf, d. h. Verzerrungen der Laminat-Mittelfläche führen zu Momenten, Krümmungen wiederum rufen Normalkräfte hervor. Folglich ist das Scheiben- und Plattenverhalten des Laminats miteinander gekoppelt und die Singularitätsexponenten können nicht mehr wie im vorherigen Kapitel für den symmetrischen Kreuzverbund getrennt nach den Exponenten des Scheiben- bzw. Plattenverhaltens betrachtet werden. Ansonsten ist der einfache Kreuzverbund ausgeglichen und somit frei von Drillkopplungen. Betrachtet man ein kreisförmiges Laminat mit Riss, dessen Seitenränder sich frei bewegen können, erhält man vier Moden, die zur bekannten Risspitzensingularität führen, vgl. Abb. 4.43. Dies entspricht dem Verhalten, das man vom symmetrischen Kreuzverbund aus dem vorherigen Kapitel kennt. Dort treten ebenfalls für $\alpha = 0^\circ$ zwei Moden mit der klassischen Risspitzensingularität auf, die dem Scheibenverhalten aus Abb. 4.21 zugeordnet werden können, sowie zwei Moden, die das Plattenverhalten widerspiegeln, vgl. Abb. 4.35. Qualitativ ähneln sich die Verläufe der Singularitätsexponenten. Moden, die zu singulären Schnittmomenten führen, treten nur für Winkel $\alpha < 180^\circ$ auf. Auf Grund der Art der Biegedehnpkopplungen beim Kreuzverbund geht die Eigenform, die eine symmetrische Modus-I-Öffnung in der Ebene beschreibt, auch mit einer symmetrischen Rissöffnung aus der Laminatmittelebene, also einer Biegedeformation, einher. Gleiches gilt umgekehrt für die Deformationsmoden, die die asymmetrische Rissöffnung beschreiben, sie treten zusammen mit einer Verdrillung des Laminats auf. Größere Unterschiede bei den Realteilen der Eigenwerte λ im Vergleich zum symmetrischen Kreuzverbund ergeben sich vor allem für

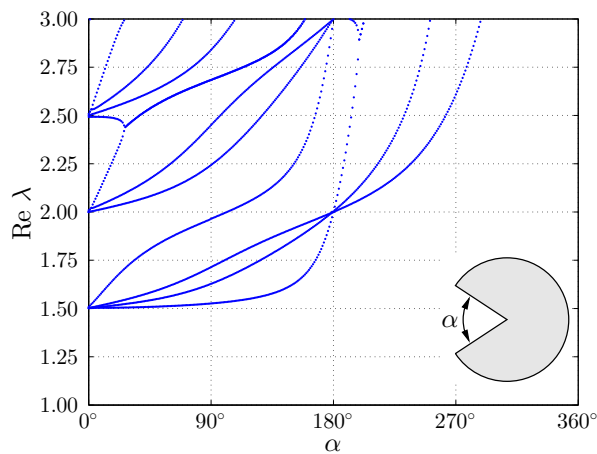


Abb. 4.43: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / frei

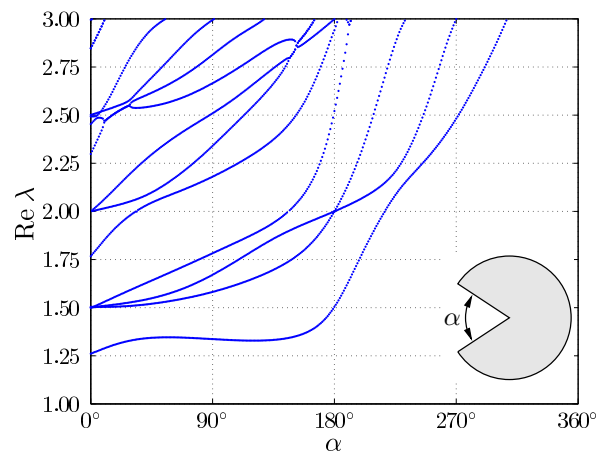


Abb. 4.44: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_r = 0$

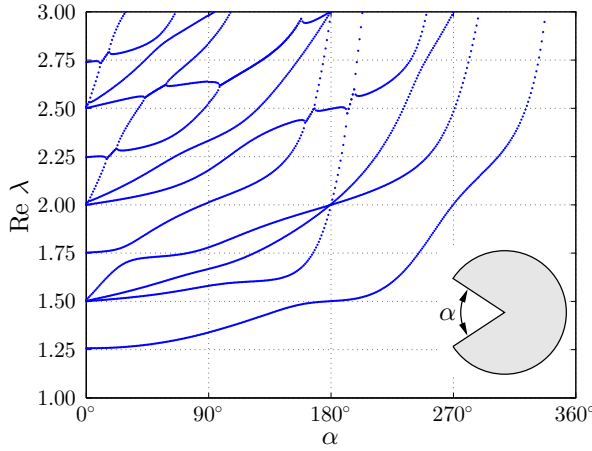


Abb. 4.45: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_\varphi = 0$

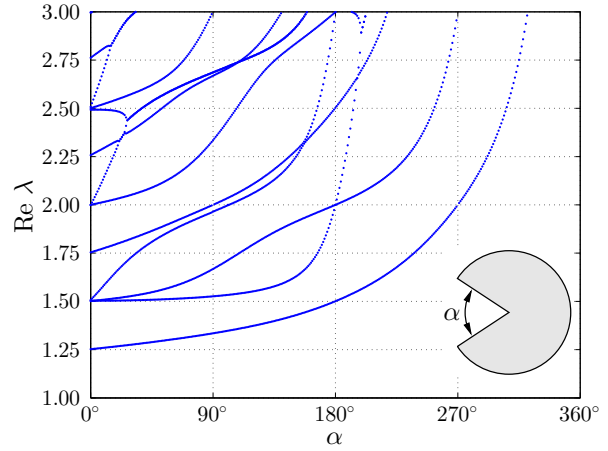


Abb. 4.46: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $w = 0$

Eigenwerte im Bereich $2 \leq \lambda \leq 3$. Diese führen zu Singularitäten in den Querkräften, wobei jedoch angemerkt werden muss, dass diese auch in der klassischen Laminattheorie aus Gleichgewichtsbetrachtungen am infinitesimalen Laminelement resultieren.

In Abb. 4.44 und Abb. 4.45 sind die Verläufe dargestellt, die man erhält, wenn die Verschiebung einer Seitenfläche der Kerbe in radialer Richtung u_r bzw. in Umfangsrichtung u_φ gesperrt ist. Ist eine Verschiebung auf einer Seitenfläche gesperrt, egal ob inplane oder out-of-plane (vgl. Abb. 4.46), erhält man im Fall eines Risses fünf Eigenmoden, die zu singulären Spannungen führen. Wobei der betragsmäßig kleinste Eigenwert für $\alpha = 0^\circ$ immer $\lambda_1 = 1.25$ ist und zu dem Mode gehört, dessen Eigenform durch die Randbedingung auf der Kerbflanke beeinträchtigt wird. Daneben gibt es drei Moden, die mit der klassischen Rissspitzensingularität $\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$ einhergehen. Der fünfte Mode zum Eigenwert $\lambda_5 = 1.75$ führt ebenfalls zu singulären Spannungen, die jedoch als weniger kritisch im Vergleich zu den Singularitäten der ersten vier Eigenwerte anzusehen sind. Tendenziell führen Randbedingungen bzw. Verschiebungen, die auf den Rissufern bzw. Kerbflanken zu Null gesetzt werden, immer zu stärkeren Spannungssingularitäten als bei freien Rändern. Für die drei genannten Konfigurationen tritt im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ eine Spannungssingularität auf, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität ist. Nur der Deformationsmode, der zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert gehört, führt darüber hinaus bei Winkeln $\alpha > 180^\circ$ zu singulären Momenten. Für die Eigenwerte aller übrigen Moden gilt $\lambda > 2$ für Winkel $\alpha > 180^\circ$, womit keine singulären Momente und Normalkräfte mehr auftreten. Betrachtet man die vier Eigenmoden mit den betragsmäßig kleinsten Eigenwerten, ist aus dem Verlauf der Eigenwerte weiter ersichtlich, dass das Verhindern der Verschiebung in Umfangsrichtung den Verlauf der Eigenwerte qualitativ stärker beeinflusst als das Verhindern der Verschiebung in Umfangsrichtung, da bei $u_\varphi = 0$ auf einer Seitenfläche auch bei größeren Winkeln noch mehr Moden auftreten, die zu singulären Momenten und damit Spannungen führen.

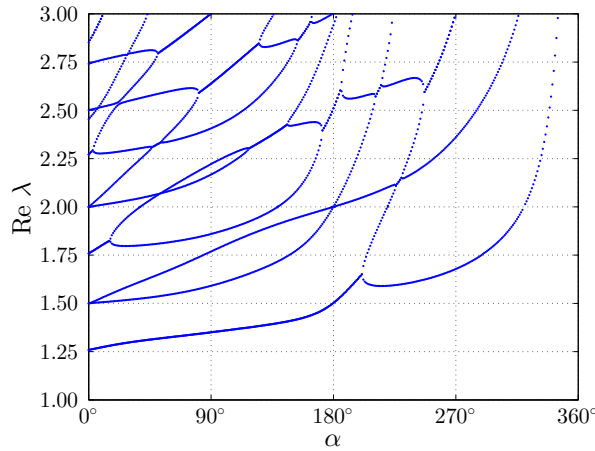


Abb. 4.47: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_r = u_\varphi = 0$

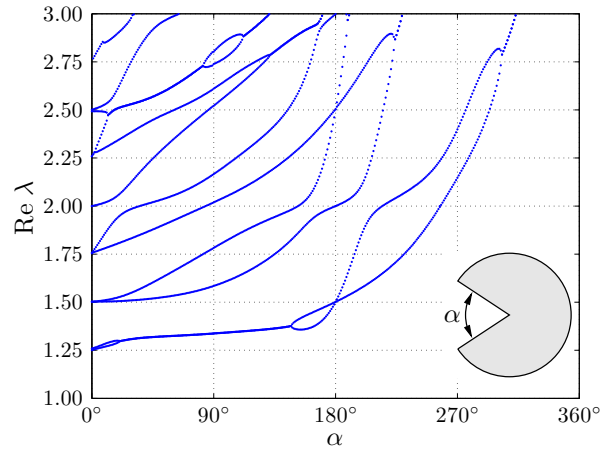


Abb. 4.48: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_r = w = 0$

In den Abb. 4.47 bis 4.49 sind die Exponentenverläufe dargestellt, wenn ein Rand der Kerbe sich frei bewegen kann und auf der anderen Korbflanke zwei Verschiebungen zu Null gesetzt werden. Im Fall eines Risses erhält man in allen drei Fällen jeweils sechs Deformationsmoden, die zu singulären Spannungen führen. Es ergeben sich jeweils zwei Moden, die zu einer Supersingularität ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$) führen, zwei Moden die zur klassischen Rissspitzensingularität führen und zwei Moden, die im Vergleich dazu zu schwächeren singulären Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$ führen. Wobei für die Kombination frei / $u_r = w = 0$ für den Riss alle Moden reell sind, während bei den Randbedingungskombinationen frei / $u_r = u_\varphi = 0$ bzw. frei / $u_\varphi = w = 0$ die Moden zum Eigenwert mit dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert $\text{Re } \lambda = 1.25$ konjugiert komplex sind. Die zwei Moden, die zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert gehören, führen in allen drei Fällen im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zu Spannungssingularitäten, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität sind. Bei

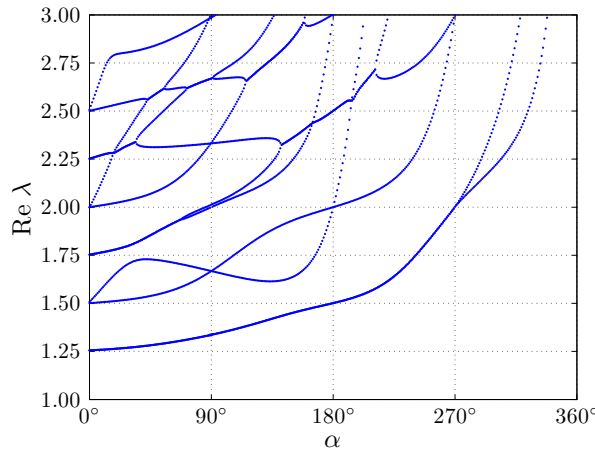


Abb. 4.49: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_\varphi = w = 0$

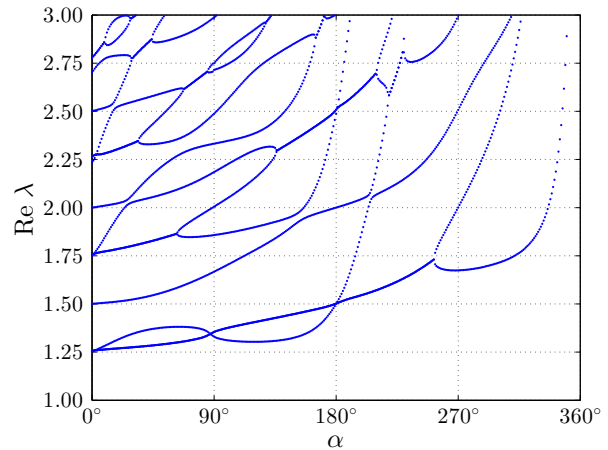


Abb. 4.50: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / $u_r = u_\varphi = w = 0$

$\alpha = 180^\circ$ tritt bei den drei genannten Randbedingungskombinationen ein konjugiert komplexer Eigenwert mit $\text{Re } \lambda = 1.5$ auf. Diese Fälle entsprechen einer Rissmodellierung mittels eines Halbmodells, womit man die klassische Rissspitzensingularität erhält. Je nach Randbedingung ist die Rissspitzensingularität zum Eigenwert mit $\text{Re } \lambda = 1.5$ aber auch konjugiert komplex, es treten folglich oszillierende Spannungen auf Grund der Kopplung zwischen Scheiben- und Plattenverhalten sowie der gewählten Randbedingungen auf.

Kann sich eine Rissflanke frei bewegen und sind bei der anderen alle drei Verschiebungen gesperrt, erhält man die Verläufe aus Abb. 4.50. Man erhält nun für den Riss neben dem konjugiert komplexen Mode einen reellen, der mit der Singularität $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ einhergeht. Nur noch ein Mode weist die gleiche Ordnung wie die klassische Rissspitzensingularität auf und insgesamt drei Moden, ein reeller sowie ein konjugiert komplexer, führen zu singulären Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$.

Sperrt man außerdem die Neigung der Seitenfläche, deren Verschiebungen verhindert sind, gelangt man zu Abb. 4.51. Man erhält im Fall eines Risses die gleichen Singularitäten, wie in Abb. 4.50 mit der Ausnahme, dass der Modus, der zur klassischen Rissspitzensingularität führt, nicht mehr auftritt. Insgesamt lässt sich für die Verläufe aus den Abb. 4.44 bis 4.51 festhalten, dass sobald ein Freiheitsgrad entlang eines Rissufers bzw. einer Kerbflanke zu Null gesetzt wird, deutlich stärkere Spannungssingularitäten entstehen als für die gemeinhin als kritischsten Fall angesehene klassische $r^{-0.5}$ -Rissspitzensingularität. Die genannten Fälle können auch in der Realität auftreten, z. B. an Einspannungen und Lagerungen. Dort treten erwartungsgemäß die höchsten Beanspruchungen auf. Risse, die auf Grund von Ungenauigkeiten oder Nachlässigkeiten bei der Fertigung in diesen Bereichen entstanden sind, führen nun zu besonders kritischen Situationen.

Betrachtet man eine Kerbe, deren Flanken sich nicht in z -Richtung verschieben können, erhält man Abb. 4.52. Denkt man nur an das Plattenverhalten des Laminats, könnte man von einer gelenkigen Lagerung sprechen. In diesem Fall kann sich das Laminat für $\alpha = 0^\circ$ um die x -Achse bzw. den Riss und bei $\alpha = 180^\circ$ um die y -Achse drehen. Diese Starr-

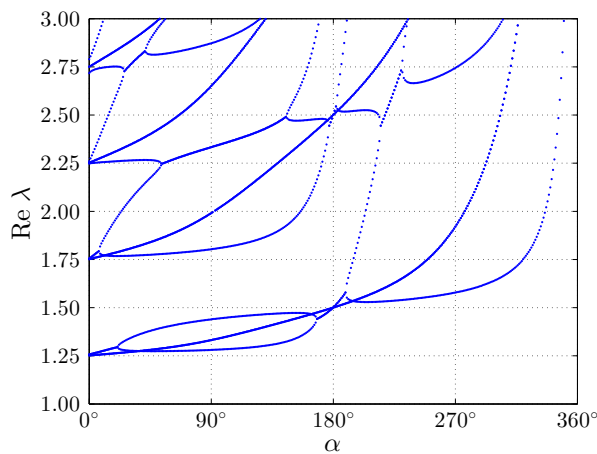


Abb. 4.51: Singularitätsexponent λ
RBen: frei / eingespannt

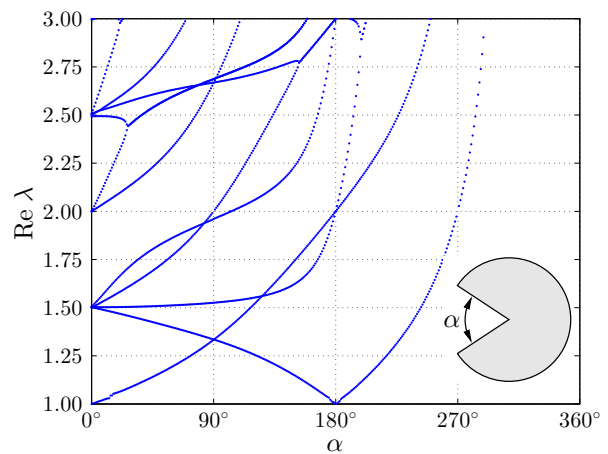


Abb. 4.52: Singularitätsexponent λ
RBen: $w = 0$ / $w = 0$

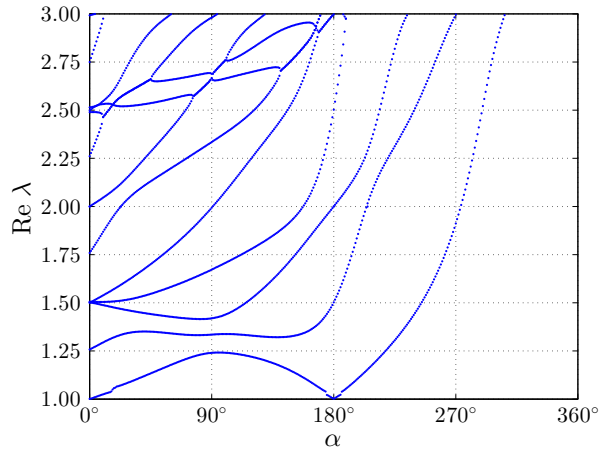


Abb. 4.53: Singularitätsexponent λ
RBen: $u_r = w = 0$ / $w = 0$

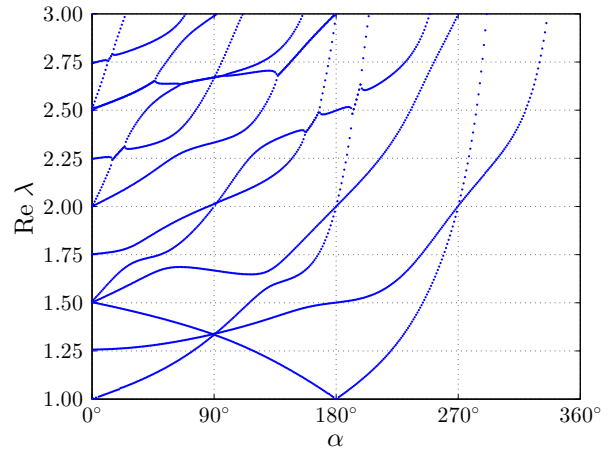


Abb. 4.54: Singularitätsexponent λ
RBen: $u_\varphi = w = 0$ / $w = 0$

körperrotationen werden von den Deformationsmoden, die zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehören, beschrieben. Für alle anderen Winkel α sind diese Starrkörperrotationen verhindert, so dass diese Moden sehr hohe Spannungssingularitäten hervorrufen. Diese Moden sind die einzigen, die höhere Spannungen als $\sigma_{ij} \sim r^{-0.5}$ hervorrufen.

Setzt man die Out-of-plane-Verschiebung w auf beiden Rissflanken zu Null, wie in Abb. 4.52, und setzt dazu auf einer Rissflanke die Verschiebung u_r , vgl. Abb. 4.53, oder die Verschiebung u_φ , vgl. Abb. 4.54, zu Null, erhält man natürlich wieder die Starrkörperrotationen bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$. Für den Riss tritt wieder in beiden Fällen ein Mode zum Eigenwert $\lambda = 1.25$ auf, wie man ihn aus den Diagrammen 4.44 bzw. 4.45 kennt, der im weiteren für den gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zu stärkeren Spannungssingularitäten als die klassische Rissspitzensingularität führt. Daneben erhält man drei Moden mit der klassischen Rissspitzensingularität und einen Mode, der zu Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$ führt. Wird die Inplane-Verschiebung in radialer Richtung zu Null gesetzt,

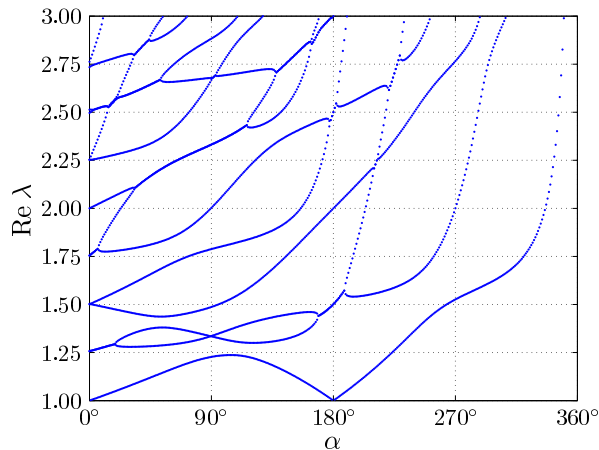


Abb. 4.55: Singularitätsexponent λ
RB: $u_r = u_\varphi = w = 0$ / $w = 0$

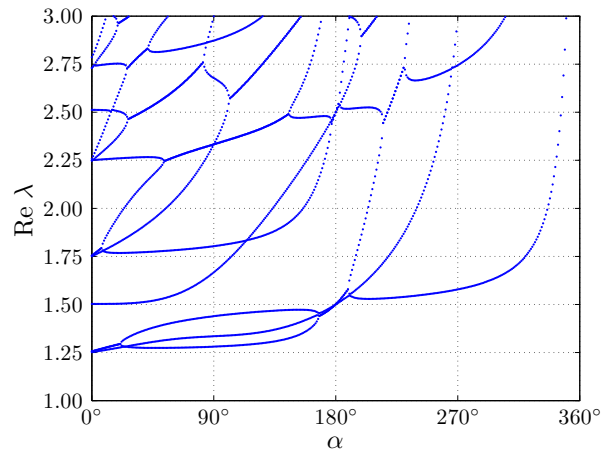


Abb. 4.56: Singularitätsexponent λ
RBen: $w = 0$ / eingespannt

weist ein Mode, der bei einem Riss zum Eigenwert $\lambda = 1.5$ führt, mit wachsendem Winkel α eine stärkere Singularität auf, wobei er sein Minimum $\lambda = 1.41$ bei einem Winkel von $\alpha = 82^\circ$ erreicht. Hält man außerdem den Freiheitsgrad u_φ fest (Abb. 4.55), erhält man bei $\alpha = 0^\circ$ einen konjugiert komplexen Mode $\lambda = 1.25$, nur noch zwei Moden mit der klassischen Rissspitzensingularität bei $\lambda = 1.5$ sowie einen konjugiert komplexen Mode $\lambda = 1.75$. Mit zunehmender Anzahl von festgehaltenen Randbedingungen auf den Seitenrändern, wächst die Zahl der Deformationsmoden, die zu Spannungssingularitäten führen. Wobei die stärksten Singularitäten weiterhin von dem Deformationsmode ausgehen, der bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ eine Starrkörperrotation beschreibt. Spannt man nun die eine Seitenfläche vollends ein, können keine Starrkörperrotationen mehr auftreten. Damit erhält man aber auch keine singulären Spannungen mit $\sigma_{ij} < r^{-0.75}$. Die stärkste Singularität geht dann mit $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ einher. Das Diagramm 4.56 entspricht dabei weitgehend dem Verlauf der Eigenwerte bei der Kombination frei/eingespannt in Abb. 4.51, zumindest in den Bereichen, wo die Eigenwerte zu singulären Spannungen führen. Die Ausnahme stellt der Mode dar, der bei $\alpha = 0^\circ$ mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergeht.

Hält man neben beiden Out-of-plane-Verschiebungen w zusätzlich jeweils eine Inplane-Verschiebung auf jedem Rissufer fest, erhält man die Diagramme 4.57 und 4.58. Man erhält nun neben den Starrkörperrotationen bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ jeweils eine Starrkörperverschiebung. In Abb. 4.57 ist jeweils die Verschiebung in radialer Richtung festgehalten. Folglich kann sich das Laminat bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ in Umfangsrichtung verschieben. Auf Grund des für die Inplane-Verschiebungen gewählten Ansatzes $\mathbf{u} = \xi^{\lambda-1}\boldsymbol{\psi}$ gehen diese Starrkörperverschiebungen ebenfalls mit dem Eigenwert $\lambda = 1$ einher. Ist auf der einen Rissflanke die Verschiebung in radialer Richtung und auf der anderen die in Umfangsrichtung festgehalten, treten bei $\alpha = 90^\circ$ und $\alpha = 270^\circ$ Starrkörperverschiebungen auf, vgl. Abb. 4.58. Wobei wie im ebenen Fall beim symmetrischen Kreuzverbund die Kombination zweier unterschiedlicher Inplane-Freiheitsgrade, die zu Null gesetzt werden, als kritischer anzusehen ist. In diesem Fall entstehen deutlich stärkere und mehr Spannungssingularitäten, die darüber hinaus in einem größeren Bereich auftreten.

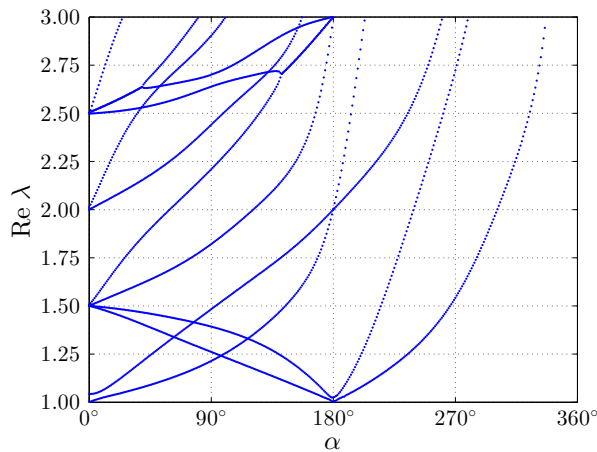


Abb. 4.57: Singularitätsexponent λ
RB: $u_r = w = 0$ / $u_r = w = 0$

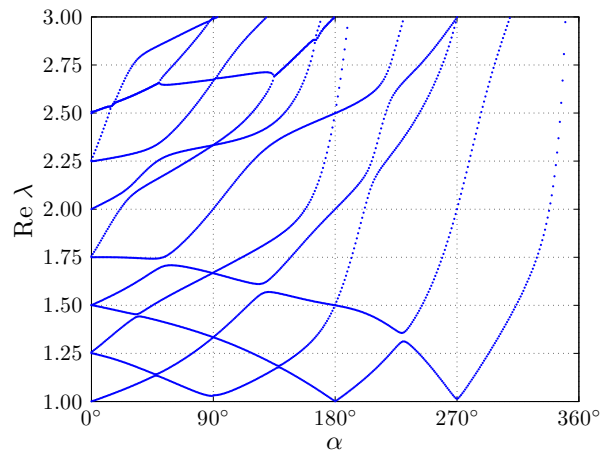


Abb. 4.58: Singularitätsexponent λ
RB: $u_r = w = 0$ / $u_\varphi = w = 0$

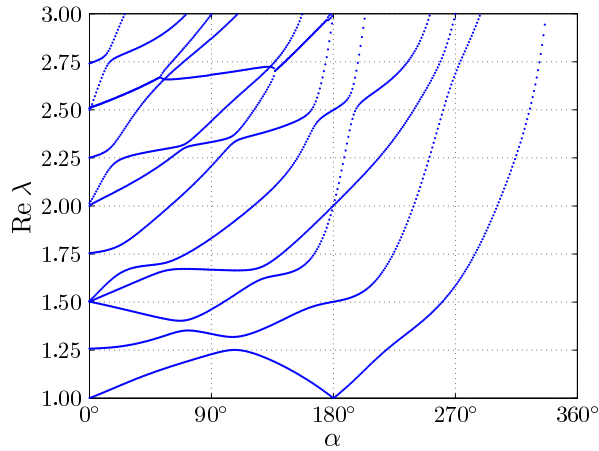


Abb. 4.59: Singularitätsexponent λ
 $u_r = w = 0$ / $u_r = u_\varphi = w = 0$

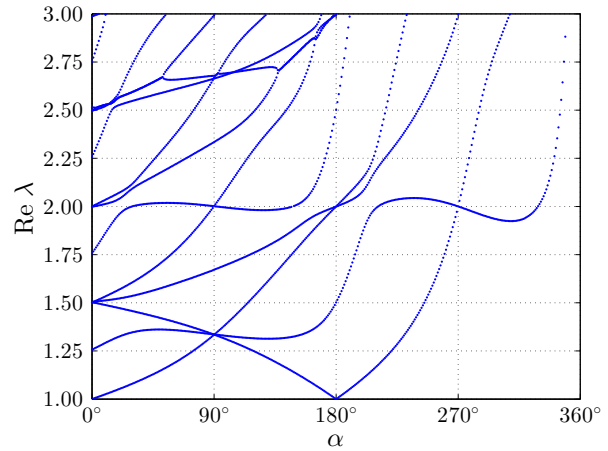


Abb. 4.60: Singularitätsexponent λ
 $u_\varphi = w = 0$ / $u_r = u_\varphi = w = 0$

Untersucht man Konfigurationen mit Riss, wobei auf einer Rissflanke alle Verschiebungsfreiheitsgrade fest gehalten werden, so dass sich die Rissflanke nur um sich selbst drehen kann, während auf der anderen Rissfläche neben der Out-of-plane-Verschiebung w nur noch die Verschiebung u_r oder u_φ verhindert werden, gelangt man zu den Diagrammen 4.59 und 4.60. Man erkennt bei $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ wieder die Starrkörpermoden, das Laminat kann sich bei diesen Winkeln um die x - bzw. y -Achse drehen. Wird u_r wie in Abb. 4.59 fest gehalten, werden diese Starrkörperrotationen von einem Mode abgebildet, während bei der Randbedingung $u_\varphi = 0$ diese von zwei verschiedenen Deformationsmoden dargestellt werden. Für einen Riss erhält man wiederum einen Deformationsmode zum Eigenwert $\lambda = 1.25$, der mit einer starken Spannungssingularität einhergeht, sowie drei Moden zum Eigenwert $\lambda = 1.5$, die mit der gleichen Singularität wie die klassische Rissspitzensingularität auftreten. Der Mode zum Exponent $\lambda = 1.25$ ruft sowohl bei Abb. 4.59 als auch bei Abb. 4.60 im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ Singularitäten hervor, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität sind. Interessant ist weiterhin, dass dieser Mode in Abb. 4.60 auch für Winkel $\alpha > 270^\circ$ schwache Singularitäten hervorruft. Alle Exponenten, die beim Riss mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen, weisen bei Winkeln $\alpha > 180^\circ$ keine Singularitäten mehr auf. Ausnahme ist dabei der Eigenwert, dessen Eigenvektor bei der Konfiguration aus Abb. 4.60 bei $\alpha = 180^\circ$ die Starrkörperrotation beschreibt. Insgesamt kann die Randbedingungskombination $u_\varphi = w = 0$ / $u_r = u_\varphi = w = 0$ als die kritischere von beiden angesehen werden, weil bei ihr auch bei größeren Winkeln stärkere Singularitäten auftreten als bei der Konfiguration aus Abb. 4.59. In den Abb. 4.61 bis Abb. 4.62 ist jeweils ein Rand des Risses bzw. der Kerbe fest eingespannt. Auf dem anderen werden die Verschiebung w und entweder die Inplane-Verschiebung u_r , siehe Abb. 4.61, oder die Umfangskomponente u_φ wie in Abb. 4.62 zu Null gesetzt. Für die Randbedingungskombination $u_r = w = 0$ / eingespannt aus Abb. 4.61 erhält man für den Riss wiederum zwei Eigenwerte, die zu Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ führen. Zwei Exponenten gehen mit der klassischen Rissspitzensingularität einher, außerdem treten noch zwei Exponenten auf, die schwächere Singularitäten $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$ hervorrufen. Für die Randbe-

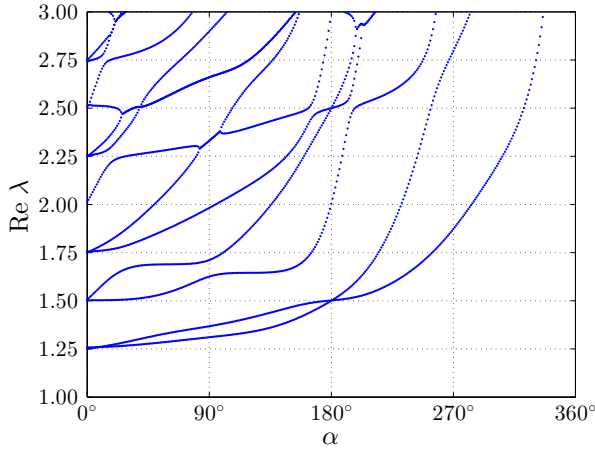


Abb. 4.61: Singularitätsexponent λ
 $u_r = w = 0$ / eingespannt

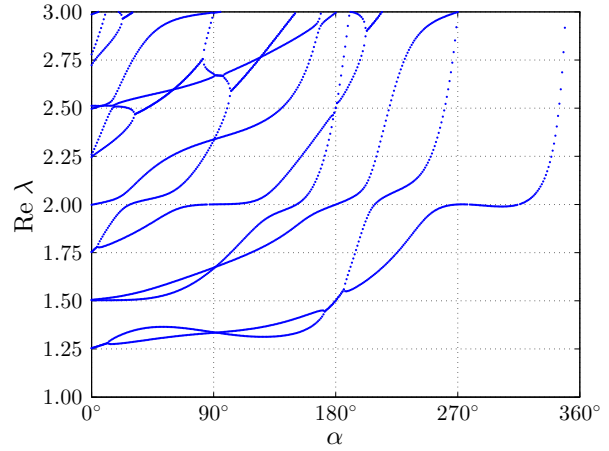


Abb. 4.62: Singularitätsexponent λ
 $u_\varphi = w = 0$ / eingespannt

dingungskombination $u_r = w = 0$ / eingespannt erhält man somit bei einem Riss $\alpha = 0^\circ$ und für einen geraden Rand $\alpha = 180^\circ$ die gleichen Singularitäten wie für den Fall der Randbedingungen $u_r = w = 0$ / frei aus Abb. 4.48. Die gleiche Analogie ergibt sich für $\alpha = 0^\circ$ bzw. $\alpha = 180^\circ$ auch für die Randbedingungskombination $u_\varphi = w = 0$ / eingespannt im Vergleich mit der Randbedingungskombination frei / $u_\varphi = w = 0$, siehe Abb. 4.49. Andererseits verhält sich ein eingespannter Rand genau umgekehrt wie ein freier Rand. Bei der Randbedingungskombination $w = 0$ / eingespannt aus Abb. 4.56 treten drei Moden auf, die Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ hervorrufen. Mit jedem Verschiebungsfreiheitsgrad, der nun zusätzlich verhindert wird, tritt ein Mode weniger auf, der zu den starken Singularitäten $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ führt. Sind beide Rissufer eingespannt, treten wie für zwei freie Ränder schließlich vier Moden mit der klassischen Rissspitzensingularität auf. Singuläre Momente liegen nur für Winkel $\alpha < 180^\circ$ vor.

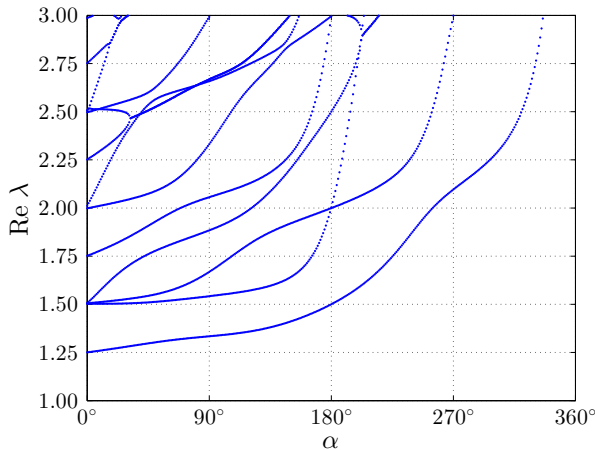


Abb. 4.63: Singularitätsexponent λ
 $u_r = u_\varphi = w = 0$ / eingespannt

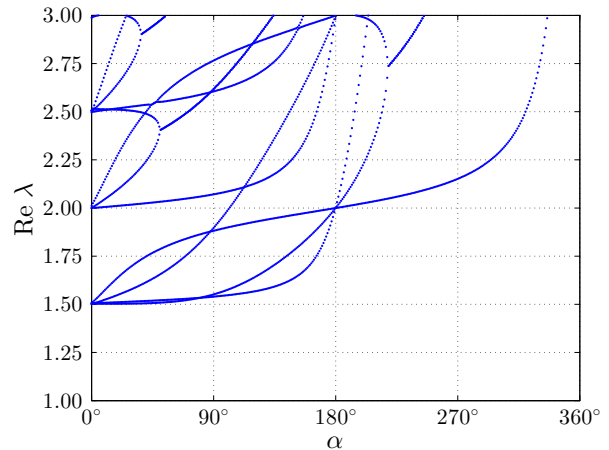


Abb. 4.64: Singularitätsexponent λ
eingespannt / eingespannt

Abschließend lässt sich festhalten, dass bei einem Laminat bei freien Rändern im Fall eines Risses vier Eigenwerte auftreten, die Spannungen in der Stärke der klassischen Riss-spitzensingularität hervorrufen. Zwei Exponenten resultieren aus dem Scheibenverhalten, zwei aus dem Plattenverhalten. Bei Laminaten mit beliebigem Layup sind diese Moden in der Regel miteinander gekoppelt. Generell gilt, ist die Randbedingung für einen Freiheitsgrad auf beiden Rissufern gleich, erhält man die klassische Rissspitzensingularität. Ist sie unterschiedlich, erhält man zwei Exponenten, die zu singulären Spannungen führen. Ein Eigenwert $\lambda = 1.25$ führt dabei zu einer Hypersingularität, während der andere Eigenwert $\lambda = 1.75$ schwächere Singularitäten hervorruft.

4.7 Singularitätsexponenten des unsymmetrischen Winkelverbunds

In Kapitel 4.7 werden die Singularitätsexponenten von $[\pm\omega]$ -Winkelverbunden untersucht. Auf Grund ihres Lagenaufbaus sind diese Lamine ausgeglichen, d. h. frei von Schubkopplungen ($A_{16} = A_{26} = 0$), und außerdem frei von Drillkopplungen. Allerdings weisen unsymmetrische Winkelverbunde eine Biege-Dehn-Kopplung in Form der Steifigkeiten B_{16} und B_{26} auf. Normalkräfte gehen folglich mit einer Verdrillung des Laminats einher, Drillmomente verursachen hingegen Dehnungen. In den Abb. 4.65 bis 4.66 sind die Realteile der Singularitätsexponenten $\text{Re } \lambda$ über dem Kerböffnungswinkel α für verschiedene Winkelverbunde dargestellt. Dabei können sich die Rissufer bzw. Kerbflanken frei bewegen. Die Momente normal zur Kerbflanke und auch die Kirchhoffschen Ersatzquerkräfte entlang der Kerbflanken verschwinden somit. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass es sich bei $[\pm 30^\circ]$ - und $[\pm 60^\circ]$ -Verbunden um unterschiedliche Konfigurationen handelt, da die Risse immer parallel zur x -Achse verlaufen. Die beiden genannten Konfigurationen weisen somit auf Grund der Orientierung der Risse unterschiedliche Eigenwertverläufe und somit unterschiedliche Singularitäten auf. Vergrößert man den Winkel ω , wobei ω den Winkel zwischen der x -Achse und der Materialhauptachse beschreibt, steigt die Kopplungssteifigkeit B_{16} stark an, um bei $\omega = 30^\circ$ ihr Maximum zu erreichen. Danach fällt sie wieder stark ab. Die Steifigkeit B_{26} steigt zunächst langsamer, ist maximal bei $\omega = 60^\circ$ und geht dann wieder auf Null zurück. Betrachtet man die Summe beider Steifigkeiten, so weisen $[\pm 45^\circ]$ -Winkelverbunde maximale Biege-Dehn-Kopplungen auf. Betrachtet man die Verläufe der Singularitätsexponenten aus den Abb. 4.65 bis 4.66, erhält man für $\alpha = 0^\circ$ vier Moden mit der klassischen Rissspitzen singularität. Für alle $[\pm\omega]$ -Verbunde führen drei dieser Moden zu singulären Momenten und damit Spannungen für Winkel $\alpha < 180^\circ$. Auf Grund der Kopplung durch die Steifigkeiten B_{16} bzw. B_{26} ist eine symmetrische Modus-

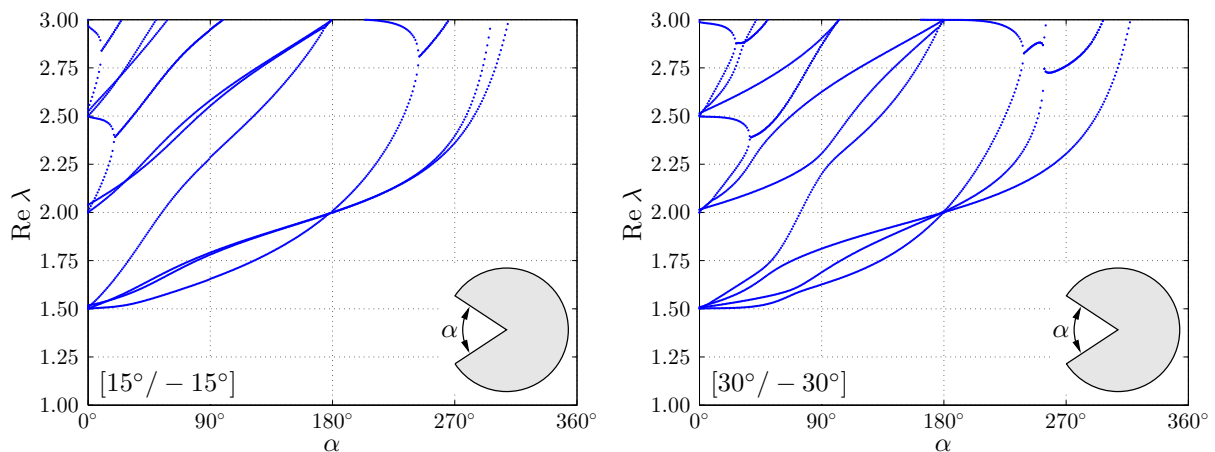


Abb. 4.65: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: frei / frei

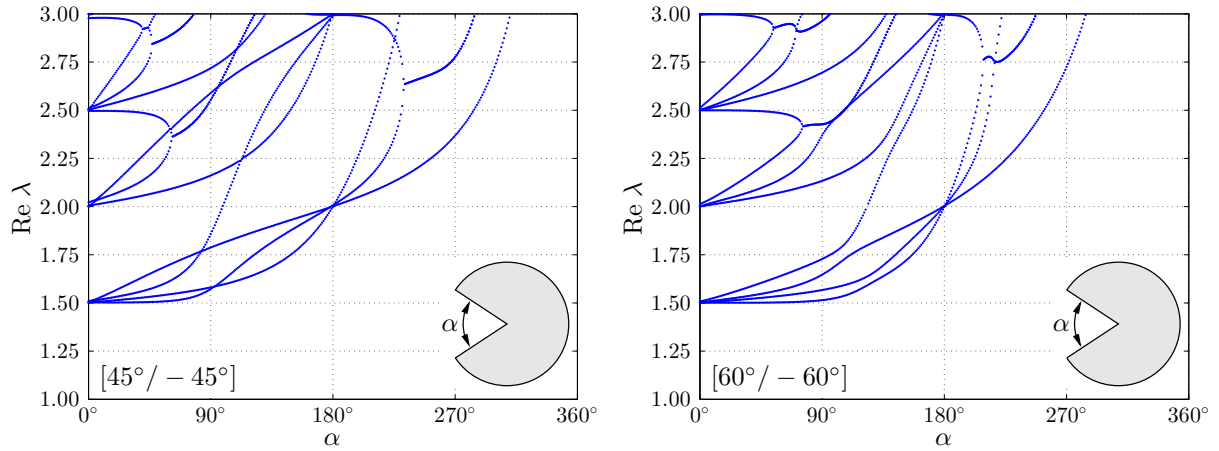


Abb. 4.66: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , Randbedingungen: frei / frei

I-Rissöffnung in der Ebene mit einer Verdrillung des Laminats gekoppelt. Dagegen führt eine ebene asymmetrische Modus-*II*-Rissöffnung zu einer Biegung des Laminats. In Abb. 4.67 und Abb. 4.68 sind Deformationsmoden für einen $[\pm 45^\circ]$ -Winkelverbund für einen Kerböffnungswinkel von $\alpha = 30^\circ$ dargestellt. Die stärkste Singularität für kleine Kerböffnungswinkel geht immer mit einer symmetrischen Modus-*I*-Öffnung in der Ebene einher, die außerdem zu einer Verdrillung des Laminats führt, vgl. Abb. 4.67. Die asymmetrische Rissöffnung in der Ebene, siehe Abb. 4.68, die zu einer Biegung des Laminats führt, verursacht dagegen schwächere Spannungssingularitäten. Dieses Verhalten weisen alle untersuchten Winkelverbunde auf. Weiter ist aus den Abb. 4.65 bis 4.66 ersichtlich, dass mit zunehmendem Winkel ω auch noch bei größeren Kerböffnungswinkeln stärkere Singularitäten beobachtet werden können. So ist beim $[\pm 60^\circ]$ -Winkelverbund selbst bei einem Kerböffnungswinkel von $\alpha = 90^\circ$ die stärkste auftretende Singularität nur unwesentlich schwächer als die klassische Rissspitzensingularität. Außerdem führt auch der Mode, der zum betragsmäßig viertkleinsten Eigenwert gehört, noch bei größeren Kerböffnungswin-

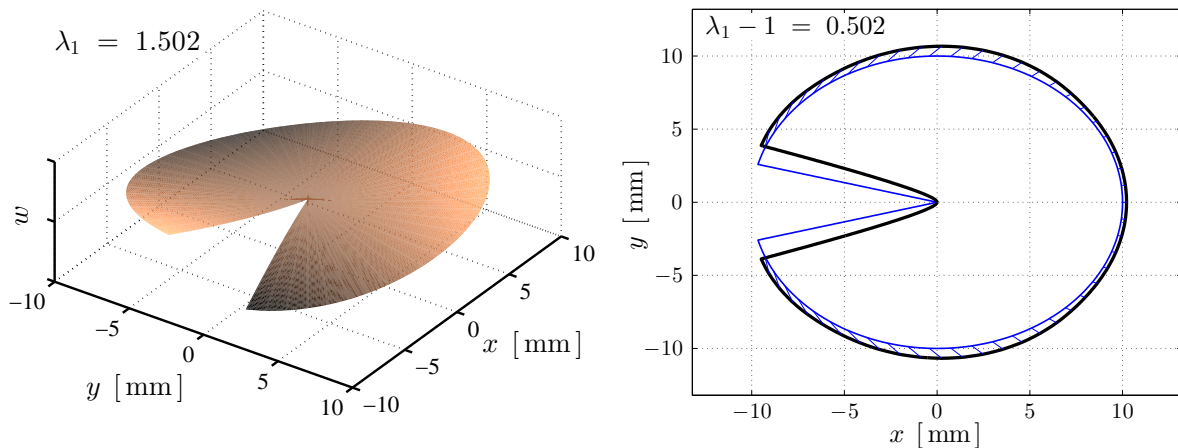


Abb. 4.67: $[\pm 45^\circ]$ -Verbund: Deformationsmode zu $\lambda_1 = 1.502$, $\alpha = 30^\circ$

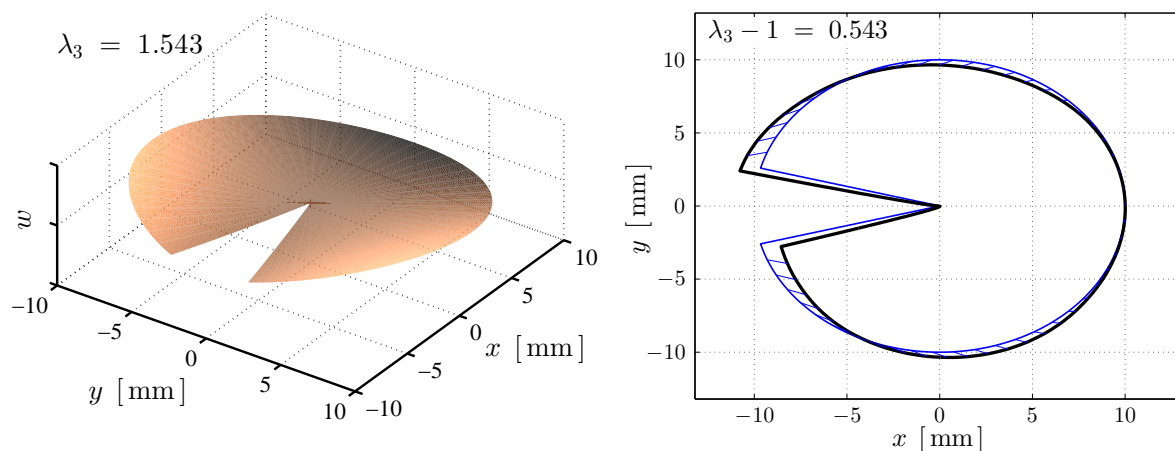


Abb. 4.68: $[\pm 45^\circ]$ -Verbund: Deformationsmode zu $\lambda_3 = 1.543$, $\alpha = 30^\circ$

keln zu singulären Spannungen. Als am kritischsten sind dabei Laminatkonfigurationen anzusehen, bei denen die Materialhauptachsen fast rechtwinklig auf den Riss bzw. die Winkelhalbierende der Kerbe treffen. Den Grenzfall stellt hierbei die orthotrope Platte aus Abb. 4.10 in Kapitel 4.4 dar, bei der die Materialhauptachse senkrecht auf den Riss trifft. Anschaulich wird dieses Verhalten, wenn man die Singularitätsexponenten als Funktion des Lagenwinkels ω für feste Kerböffnungswinkel α wie in den Abb. 4.69 bis 4.70 darstellt. Für kleine Kerböffnungswinkel α ist der Einfluss des Lagenwinkels ω auf den Exponent, der zur stärksten Spannungssingularität führt, gering. Für den Kerböffnungswinkel $\alpha = 60^\circ$ dagegen ist der Einfluss deutlich sichtbar. Ist $\omega > 45^\circ$, treten selbst bei einem Kerböffnungswinkel von $\alpha = 60^\circ$, vgl. rechtes Diagramm Abb. 4.69, Singularitäten auf, die nur unwesentlich schwächer sind als die klassische Rissspitzensingularität. Ein ähnliches Verhalten kann man auch den Diagrammen aus Abb. 4.70 entnehmen. Für alle hier untersuchten ausgeglichenen Winkelverbunde führt der Deformationsmode, der mit einer symmetrischen ebenen Rissöffnung und einer Verdrillung des Laminats einhergeht, zu den stärksten Spannungssingularitäten. Die zweitstärkste Singulartität geht in der

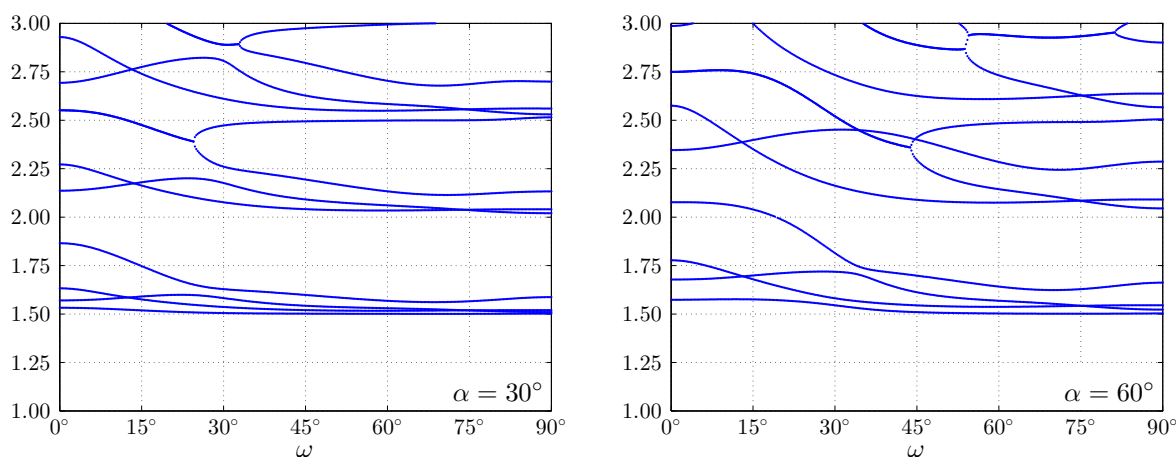


Abb. 4.69: $[\pm \omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ über Lagenwinkel ω

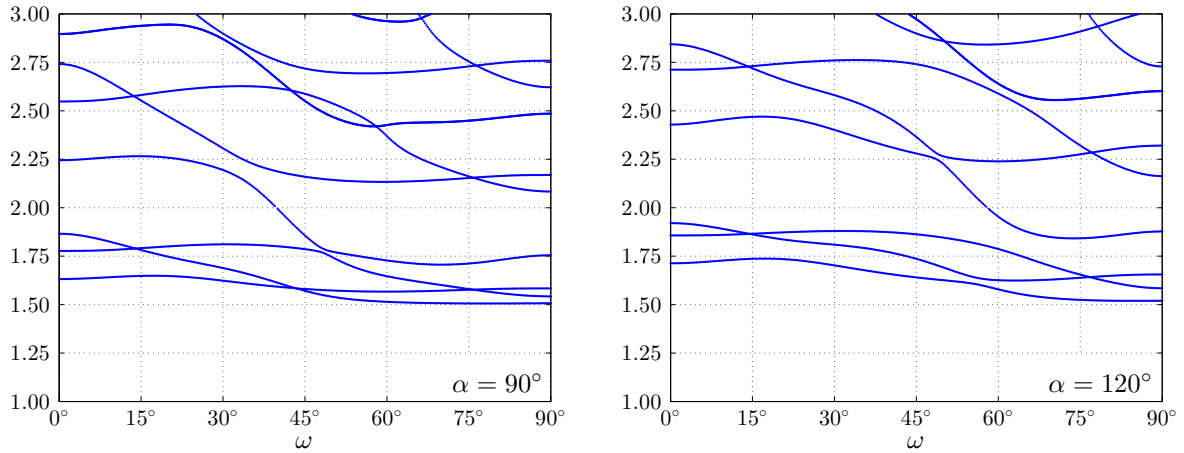


Abb. 4.70: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ über Lagenwinkel ω

Regel ebenfalls mit einer Verdrillung des Laminats einher. Die drittstärkste Singularität wird dagegen durch eine asymmetrische Modus-II-Öffnung, die zu einer Biegung des Laminats führt, verursacht. Für bestimmte Winkelverbunde, insbesondere dann, wenn die Kopplungssteifigkeiten B_{16} bzw. B_{26} besonders gering sind und somit der Winkel zwischen den Materialhauptachsen der einzelnen Schichten gering ist, kann es für bestimmte Kerböffnungswinkel vorkommen, dass der Deformationsmode, der mit einer Biegung des Laminats einhergeht, zur zweitstärksten Singularität gehört. Im rechten Diagramm in Abb. 4.70 ist dies für Lagenwinkel $\omega < 14^\circ$ bzw. $\omega > 75^\circ$ der Fall.

4.7.1 Einfluss von Randbedingungen

Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss von Randbedingungen auf die Verläufe der Spannungssingularitäten ausgeglichener Winkelverbunde diskutiert. In den Diagrammen in Abb. 4.71 sind für den $[\pm 45^\circ]$ -Winkelverbund sowie den $[\pm 60^\circ]$ -Winkelverbund die Exponenten λ_i aufgetragen, wobei die eine Seitenfläche der Kerbe sich frei bewegen kann, während bei der anderen die Verschiebung w in z -Richtung verhindert wird. Im Fall eines Risses, erhält man wie in den vorangegangenen Analysen einen Mode, der zu besonders starken Singularitäten ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$) führt. Dieser Mode führt im gesamten Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ zu Singularitäten, die stärker als die klassische Rissspitzensingularität sind. Weiter treten für $\alpha = 0^\circ$ drei Moden auf, die mit der klassischen Rissspitzensingularität einhergehen sowie ein Mode, der zu schwächeren Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$ führt. Tendenziell lässt sich dabei bei den Verläufen folgendes Verhalten ablesen: Für Kerböffnungswinkel $\alpha < 180^\circ$ sind die auftretenden Singularitäten umso stärker, je größer der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden der Kerbe und dem Lagenwinkel des Laminats ist, wobei hier als kritischster Grenzfall wieder die orthotrope Platte anzusehen ist, deren Materialhauptachse senkrecht auf die Winkelhalbierende der Kerbe trifft. Bei Winkeln $\alpha > 180^\circ$ führen dagegen Lamine mit kleinen Lagenwinkeln ω zu stärkeren Singularitäten. Außerdem treten bei diesen Verbunden auch bei größeren Öffnungswinkeln noch singuläre Momente

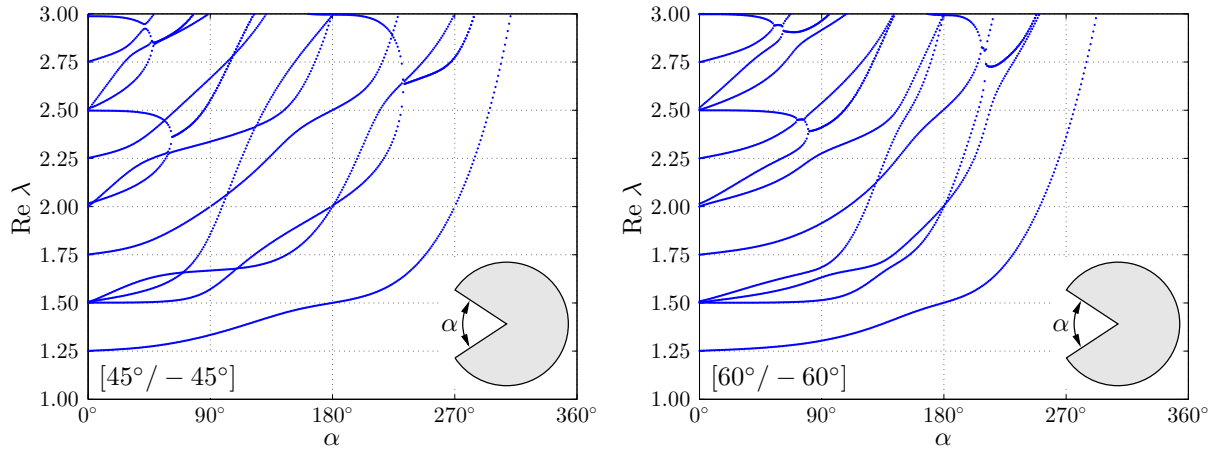


Abb. 4.71: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , RBen: frei / $w = 0$

auf umso kleiner die Lagenwinkel ω sind. In den Diagrammen aus Abb. 4.72 sind die Eigenwertverläufe über dem Kербöffnungswinkel α für die Randbedingungskombination frei/eingespannt der Seitenränder aufgetragen. Analog zum Kreuzverbund erhält man für den Riss zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, die zu Hypersingularitäten in den Spannungen ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$) führen, sowie zwei konjugiert komplexe Moden mit $\text{Re } \lambda = 1.75$. Sind die Kopplungssteifigkeiten in diesem Fall klein, führen die einzelnen Moden zu fast gleich starken Singularitäten. Bei dieser Konfiguration führt der $[\pm 45^\circ]$ -Winkelverbund auch bei Winkeln $\alpha > 270^\circ$ zu singulären Spannungen.

In Abb. 4.73 sind die Eigenwertverläufe aufgezeichnet, wenn auf beiden Kербflanken nur die Verschiebung w in z -Richtung verhindert wird. Die übrigen Verschiebungen können sich frei einstellen. Wie bei den vorangegangenen Simulationen zu Platten und Kreuzverbunden ist dies der einzige Fall, bei dem singuläre Spannungen auftreten, die stärker als $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ sind. Diese Hypersingularitäten gehören immer zu Moden, durch die die bei dieser Randbedingungskombination auftretenden Starrkörperrotationen bei $\alpha = 0^\circ$ und

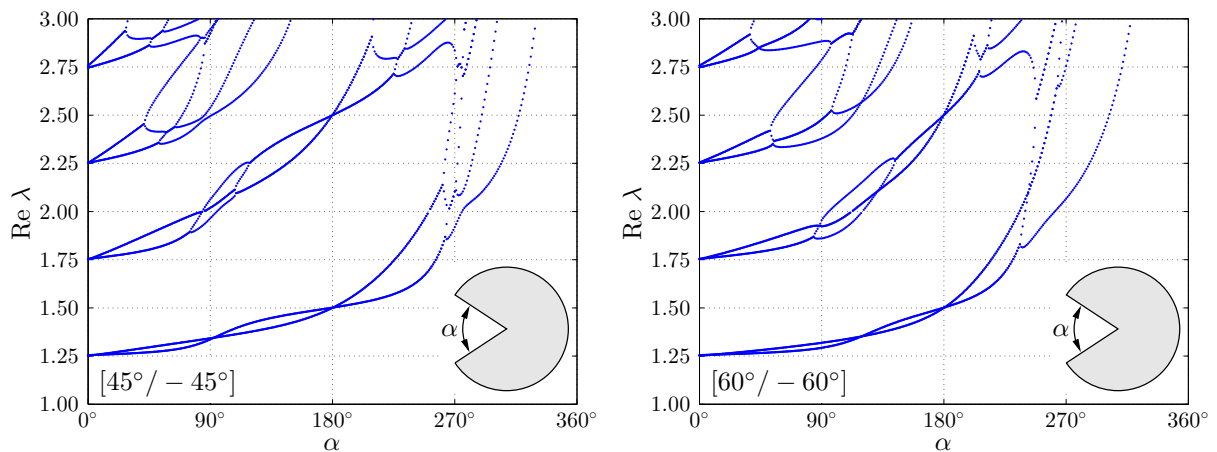


Abb. 4.72: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , RBen: frei / eingespannt

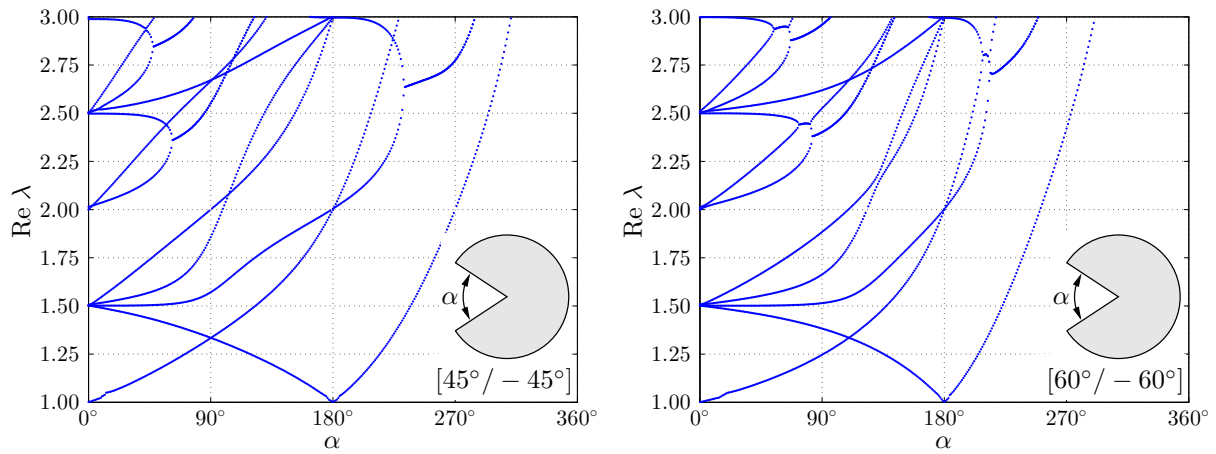


Abb. 4.73: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , RBen: $w = 0$ / $w = 0$

$\alpha = 180^\circ$ abgebildet werden. Bei $\alpha = 0^\circ$ treten vier Moden mit der klassischen Risspitzen-singularität auf, sowie ein Mode zum Eigenwert $\text{Re } \lambda = 1$, der eine Starrkörperrotation um die x -Achse beschreibt und somit keine Spannungen hervorruft. Für größer werdende Winkel α wird diese Starrkörperrotation unterbunden und es entstehen äußerst starke Singularitäten. Die Starrkörperrotation im Fall eines halbkreisförmigen Laminats wird durch einen Mode beschrieben, der bei $\alpha = 0^\circ$ mit der klassischen Risspitzen-singularität einhergeht. Unabhängig vom Layup treffen sich diese Moden immer bei $\text{Re } \lambda = 1.33$, wobei mit größeren Lagenwinkeln ω der Schnittpunkt zu größeren Kerbwinkeln α verschoben ist. Von den drei restlichen Moden verursacht ein Mode immer für Winkel $\alpha < 180^\circ$ singuläre Momente. Für den $[\pm 45^\circ]$ -Winkelverbund treten singuläre Momente bis zu einem Winkel von $\alpha = 270^\circ$ auf. Dies entspricht einer rechtwinkligen Ecke. Für kleinere Lagenwinkel ω treten singuläre Momente auch noch bei größeren Kerböffnungswinkeln auf, Winkelverbunde mit Lagenwinkeln $\omega > 45^\circ$ sind schon bei kleineren Kerböffnungswinkeln frei von singulären Momenten.

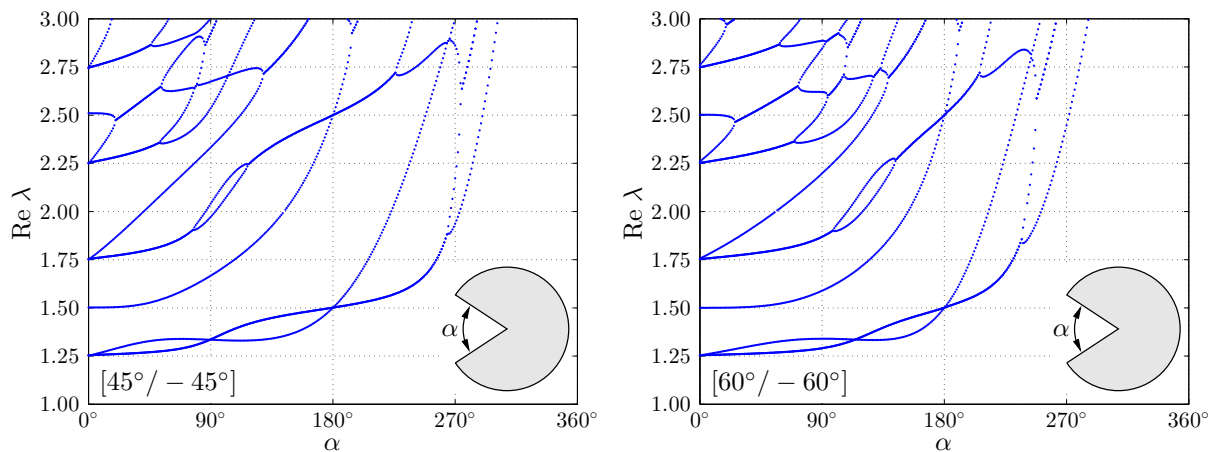


Abb. 4.74: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , RBen: $w = 0$ / eingespannt

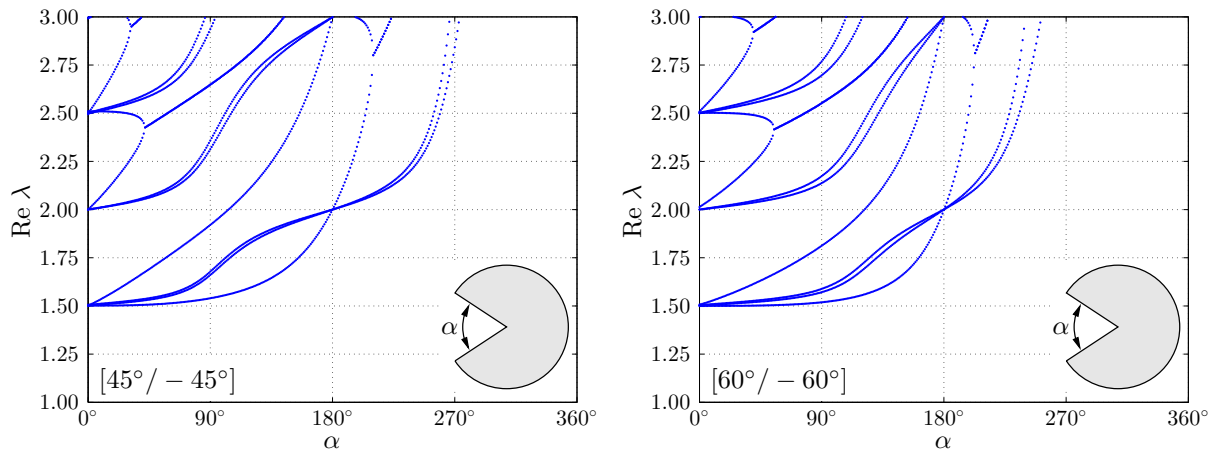


Abb. 4.75: $[\pm\omega]$ -Verbunde: Singularitätsexponent λ , RB: eingespannt / eingespannt

In Abb. 4.74 sind die Eigenwertverläufe für die Randbedingungen $w = 0$ /eingespannt dargestellt. Im Fall des Risses erhält man jeweils einen reellen sowie einen konjugiert komplexen Eigenwert, die zu den besonders starken singulären Spannungen $\sigma_{ij} \sim r^{-0.75}$ führen. Außerdem tritt ein reeller Eigenwert $\lambda = 1.5$ auf, der zur klassischen Rissspitzensingularität führt. Daneben finden sich ein reeller und ein konjugiert komplexer Eigenwert, die zu schwächeren Singularitäten ($\sigma_{ij} \sim r^{-0.25}$) führen.

Tendenziell lässt sich für die Winkelverbunde festhalten, dass im Bereich $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ umso stärkere Singularitäten auftreten, je größer der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden der Kerbe und den Lagenwinkeln der einzelnen Schichten des Laminats ist. Auf der anderen Seite lässt sich beobachten, dass sobald Verschiebungsrandbedingungen auf den Kerbflanken aufgebracht werden, bei Winkeln $\alpha > 180^\circ$ bei Laminaten, deren Lagenwinkel ω kleine Winkel mit der Winkelhalbierenden der Kerbe einschließen, stärkere Singularitäten hervorgerufen werden. Diese treten dann auch bei größeren Kerböffnungswinkeln noch auf. Das gilt auch für die abschließend dargestellte Randbedingungskombination eingespannt/eingepannt. Wobei bei eingepannten Rändern für einen Riss, wie im klassischen Fall freier Ränder, vier Moden mit der klassischen Rissspitzensingularität auftreten und singuläre Momente nur vorkommen, wenn für die Kerböffnungswinkel gilt: $\alpha < 180^\circ$. Interessant ist, dass bei eingepannten Rändern die zweit- und drittstärkste Singularität fast gleich stark sind, wenn die Kopplungssteifigkeiten maximal sind. Bei kleinen Kopplungssteifigkeiten unterscheiden sich die Verläufe der zweit- und drittstärksten Singularität sehr. Bei freien Rändern konnte man das Gegenteil beobachten.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Rand-Finite-Elemente-Methode grundlegend um die Modellierung und Berechnung schubstarrer Platten und Lamine erweitert. Dazu wurden in dieser Arbeit völlig neue Elementformulierungen der Rand-Finite-Elemente-Methode für die Analyse von Platten und Laminaten vorgestellt. Basierend auf diesen völlig neuen Formulierungen wurde am Fachgebiet Strukturmechanik der TU Darmstadt ein eigener Programmcode entwickelt. Das Programm erlaubt nicht nur die Darstellung des asymptotischen Verhaltens im Rissspitzenbereich gerissener und gekerbter Platten bzw. Lamine, sondern ermöglicht darüber hinaus die Analyse komplexer Randwertprobleme. Es verbindet somit die Genauigkeit und Effizienz analytischer Methoden mit der Vielseitigkeit und breiten Anwendbarkeit der Finite-Elemente-Methode.

In Kapitel 1 wurde nach einer einleitenden Motivation die Entwicklung und vor allem der gegenwärtige Stand der Forschung zur Rand-Finite-Elemente-Methode dargelegt, sowie ein Überblick über den Aufbau dieser Arbeit gegeben.

In Kapitel 2 wurden die zum besseren Verständnis dieser Arbeit benötigten Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Kirchhoffschen Plattentheorie sowie auf der auf den gleichen kinematischen Annahmen basierenden klassischen Laminattheorie.

Kapitel 3 beinhaltet die Formulierungen der neuartigen Platten- und Laminelemente und stellte somit die wesentliche Grundlage dieser Forschungsarbeit dar. Dazu wurden zunächst die Grundlagen der Rand-Finite-Elemente-Methode erläutert. Die Geometrie wurde durch eine Ähnlichkeitsabbildung ihres Rands bezüglich eines Skalierungszentrum beschrieben. Um diese Abbildung besser beschreiben zu können, wurden skalierte Randkoordinaten eingeführt. Die Verschiebungen wurden als Produkt von Ansatzfunktionen und unbekannten Funktionen der Skalierungscoordinate ξ approximiert. Als Ansatzfunktionen wurden zur Beschreibung des Plattenverhaltens Hermitesche Polynome gewählt. Diese Approximation der Verschiebungen ist im Rahmen der Rand-Finite-Elemente-Methode völlig neu. Auf Grund der Kirchhoffschen Plattenkinematik müssen nicht nur die Verschiebungen sondern auch ihre ersten Ableitungen über die Elementgrenzen stetig verlaufen. Hermitesche Polynome erfüllen diese sogenannten $C1$ -Stetigkeitsanforderungen der

Kirchhoffschen Plattentheorie. In Abschnitt 3.2 wurde mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ein Eulersches Differentialgleichungssystem 4. Ordnung zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen der Skalierungscoordinate ξ hergeleitet. Aus der homogenen Lösung dieses Differentialgleichungssystems wurde die Steifigkeitsmatrix K der Platte aufgebaut. Anhand einfacher Beispiele wurde das Plattenelement untersucht, wobei die Verschiebungen auch bei geringen Elementanzahlen ein sehr gutes Konvergenzverhalten zeigten. Anschließend wurde das Laminatenelement formuliert. Ebenfalls mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen wurde auch hier ein gekoppeltes Eulersches Differentialgleichungssystem 4. Ordnung zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungsfunktionen hergeleitet. Auch hier zeigte sich bei Beispielen ein sehr gutes Konvergenzverhalten, wobei insbesondere Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten korrekt erfasst wurden.

In Kapitel 4 wurden schließlich mit Hilfe der neuen Platten- sowie Laminatenelemente Singularitätsordnungen in gerissenen und gekerbten Platten bzw. Laminaten ermittelt. Zuerst wurde die isotrope Platte untersucht. Die Ergebnisse wurden mit Werten aus der Literatur, die analytisch gewonnen wurden, verglichen. Auch hier zeigte sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Anschließend wurden orthotrope Platten untersucht, wobei hier der Fokus der Untersuchungen auf dem Einfluss der Biege-Drill-Kopplungen auf die Stärke der Singularitäten lag. Ein besonderer Schwerpunkt bei der Ermittlung der Singularitäten in den Laminaten bildete die Diskussion des Einflusses von Biege-Dehn-Kopplungen und Biege-Drill-Kopplungen auf den Verlauf und die Stärke der Singularitäten. Die Untersuchung der unterschiedlichen Kopplungen und ihr Einfluss auf die Singularitätsordnungen ist in diesem Umfang nach Kenntnis des Autors von völlig neuer Qualität. Nach einem einführenden Übersichtskapitel zu singulären Spannungen und zum aktuellen Forschungsstand auf dem Gebiet der Bestimmung von Singularitätsordnungen wurden die Singularitäten an einem Riss bzw. einer Kerbe in einer isotropen Platte unter verschiedenen Randbedingungen ermittelt und mit Angaben aus der Literatur verifiziert. Dabei zeigte die Rand-Finite-Elemente-Methode im Vergleich zu analytischen Verfahren ein ausgezeichnetes Konvergenzverhalten. So ließen sich bereits mit relativ groben Diskretisierungen die Singularitäten sehr genau bestimmen. Im Abschnitt 4.4 wurde anschließend der Einfluss orthotropen Materialverhaltens umfassend diskutiert, wobei es die neuen Elementformulierungen erlauben, auch weitere Konfigurationen, wie z. B. Bi- oder Tri-Material-Konfigurationen, einfach zu implementieren sowie anschließend zu analysieren. In den Abschnitten 4.5 bis 4.7 wurden die Singularitätsordnungen verschiedener Laminatkonfigurationen präsentiert. Beim symmetrischen Kreuzverbund aus Kapitel 4.5 lagen keine Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten vor. Die Singularitäten wurden deshalb getrennt nach Scheiben- und Plattenverhalten betrachtet. Das am Fachgebiet entwickelte Programm ermöglicht aber auch zu untersuchen, welchen Einfluss Biege-Dehnkopplungen, wie sie beim einfachen Kreuzverbund vorlagen, auf den Verlauf der Singularitätsexponenten haben. Bei den unsymmetrischen Winkelverbunden wurde ebenfalls der Einfluss von Biege-Dehnkopplungen, allerdings in Form der Steifigkeiten B_{16} bzw. B_{26} , untersucht. Neben den Singularitätsordnungen können aus den zu diesen

Eigenwerten gehörenden Eigenformen der Platten und Lamine, die man aus den Analysen in der Rand-Finite-Elemente-Methode automatisch erhält, Deformationen abgelesen werden, die besonders kritische Beanspruchungszustände hervorrufen.

Bei der abschließenden Bewertung der Ergebnisse müssen bestimmte einschränkende Annahmen, die im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie zu Beginn dieser Arbeit getroffen wurden, berücksichtigt werden. Dies ist zum einen die Annahme linear elastischen Materialverhaltens. Linear elastisches Materialverhalten tritt nur in gewissen Grenzen auf. Bei Überschreiten der Fließgrenze werden örtliche Spannungsspitzen z. B. durch plastisches Fließen abgebaut, so dass in realen Strukturen an diesen hochbelasteten Stellen in der Regel keine singulären Spannungen vorliegen. Ist die Zone, in der inelastische Vorgänge auftreten, jedoch sehr klein, kann die lineare Bruchmechanik weiter erfolgreich angewandt werden. Zum Anderen stellen die kinematischen Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie bzw. der klassischen Laminattheorie eine Einschränkung dar. Diese sind nur gerechtfertigt, wenn die Platte bzw. das Laminat hinreichend dünn ist. Vollständig dreidimensionale Spannungszustände mit singulärem Charakter, wie sie z. B. vom Laminat-Randeffekt bekannt sind, werden durch die gegenwärtige Modellierung nicht erfasst.

Abschließend soll ein kurzer Ausblick gegeben werden. Die jetzige Formulierung eignet sich vor allem zur Analyse von kreisförmigen Platten und Laminen bzw. Platten und Laminen mit geraden Rändern, da auf Grund der gewählten Ansatzfunktionen zur Approximation der Verschiebungen nur in diesen Fällen C^1 -Stetigkeitsanforderungen erfüllt werden und somit nur in diesen Fällen die Konvergenz des Verfahrens gewährleistet ist. Denkbar wäre eine Erweiterung der Formulierung, um beliebige Randkonfigurationen abbilden zu können und somit den Anwendungsbereich der Methode erweitern zu können. Hinsichtlich der Ermittlung von Singularitätsexponenten wäre die Analyse weiterer Laminatkonfigurationen interessant. Vorstellbar wäre auch die Implementierung eines Optimierungsalgorithmus, um besonders kritische Laminatkonfigurationen bzw. Materialapplikationen aufzuzeigen. Daneben wäre auch die Untersuchung von Spannungssingularitäten an Verstärkungspflastern in Laminen interessant, wobei die implementierte Formulierung auch die Analyse unsymmetrischer Laminatlagenaufbauten ermöglicht, da insbesondere Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten richtig wiedergegeben werden.

In Bezug auf die Analyse komplexer Strukturen wäre die Kopplung der Rand-Finite-Elemente-Methode mit einem kommerziellen FE-Programm von Interesse. So könnte in besonders kritischen Bereichen die Rand-Finite-Elemente-Methode eingesetzt werden, um hier das asymptotische Verhalten zu ermitteln und so mit geringem Diskretisierungsaufwand eine sehr genaue Lösung zu erhalten. Durch den geringeren Diskretisierungsaufwand würde man einerseits Rechenzeit sparen, während man andererseits auf die Vorteile eines kommerziellen FE-Programms wie z. B. die Benutzerfreundlichkeit zurückgreifen könnte. Außerdem wäre die Implementierung geeigneter Versagensmodelle interessant. Hierbei scheint vor allem der Einsatz hybrider Kriterien, die die klassische spannungsbasierte Festigkeitsbewertung mit energetischen Kriterien der Bruchmechanik verbinden, vielversprechend.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, Holm ; ALTENBACH, Johannes ; NAUMENKO, Konstantin: *Ebene Flächentragwerke*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1998
- [2] ALTENBACH, Holm ; ALTENBACH, Johannes ; RIKARDS, Rolands: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. 1. Auflage. Stuttgart : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1996
- [3] ANDERSON, Ted L.: *Fracture Mechanics*. Third Edition. Boca Raton : Taylor & Francis Group
- [4] ARTEL, Jens: *Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeffekte in ebenen Laminaten*. Darmstadt : Fachbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2007
- [5] ARTEL, Jens ; BECKER, Wilfried: Coupled and uncoupled analyses of piezoelectric free-edge effect in laminated plates. In: *Composite Structures* 69 (2005), S. 329–335
- [6] ARTEL, Jens ; BECKER, Wilfried: Analysis of the free-edge effect in piezoelectric laminated plates by the scaled boundary finite element method. In: *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology*, 2006
- [7] ARTEL, Jens ; BECKER, Wilfried: On kinematic coupling equations within the scaled boundary finite element-method. In: *Archive of Applied Mechanics* 76 (2006), S. 617–633
- [8] BARROSO, A. ; MANTIĆ, V. ; PARÍS, F.: Singularity analysis of anisotropic multi-material corners. In: *International Journal of Fracture* 119 (2003), S. 1–23
- [9] BECKER, Wilfried ; GROSS, Dietmar: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2002
- [10] BIRK, C. ; BEHNKE, R.: A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89 (2011), S. 371–402
- [11] BLUM, H. ; RANNACHER, R.: On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2 (1980), S. 556–581

- [12] BRAHTZ, J. H. A.: Stress distribution in a reentrant corner. In: *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* 55 (1933), S. 31–37
- [13] BURG, Klemens ; HAF, Herbert ; WILLE, Friedrich: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band II: Lineare Algebra*. 3., durchgesehene und erweiterte Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 1992
- [14] BURG, Klemens ; HAF, Herbert ; WILLE, Friedrich: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. 3., durchgesehene und erweiterte Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 1993
- [15] BURTON, W. S. ; SINCLAIR, G. B.: On the Singularities in Reissner's Theory for the Bending of Elastic Plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), S. 220–222
- [16] CARPENTER, W. C.: The eigenvector solution for a general corner or finite opening crack with further studies on the collocation procedure. In: *International Journal of Fracture* 27 (1985), S. 63–74
- [17] CARPENTER, W. C. ; BYERS, C.: Calculation of fracture parameters for a general corner. In: *International Journal of Fracture* 24 (1984), S. 45–58
- [18] CARPENTER, W. C. ; BYERS, C.: A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material. In: *International Journal of Fracture* 35 (1987), S. 245–268
- [19] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M.: Influence of the intermediate material on the singular stress field in trimaterial junctions. In: *Materials Science* 42 (2006), S. 95–101
- [20] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M.: Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 59–74
- [21] CARPINTERI, A. ; PAGGI, M. ; PUGNO, N.: Numerical evaluation of generalized stress-intensity factors in multi-layered composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 627–641
- [22] CHAPKIS, R. L. ; WILLIAMS, M. L.: Stress singularities for a sharp-notched polarly orthotropic plate. In: *Proc. ad US Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1958, S. 281–286
- [23] CHEN, H. P.: Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), S. 1057–1073
- [24] CHIDGZEY, Steven R. ; DEEKS, Andrew J.: Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 2019–2036

-
- [25] CHO, S. B. ; CARPENTER, W. C.: The complex potential approach to power-logarithmic stress singularities for V-notched cracks in a bi-material. In: *KSME International Journal* 13 (1999), S. 19–25
- [26] DASGUPTA, G.: A Finite Element Formulation for Unbounded Homogeneous Continua. In: *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), S. 136 – 140
- [27] DEEKS, A. J. ; WOLF, J. P.: Semi-analytical elastostatic analysis of unbounded two-dimensional domains. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 26 (2002), S. 1031–1057
- [28] DEEKS, A. J. ; WOLF, J. P.: A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics. In: *Computational Mechanics* 28 (2002), S. 489–504
- [29] DEEKS, Andrew J.: Prescribed side-face displacements in the scaled boundary finite-element method. In: *Computers and Structures* 82 (2004), S. 1153–1165
- [30] DEEKS, Andrew J. ; WOLF, John P.: Semi-analytical solution of Laplace’s equation in non-equilibrating unbounded problems. In: *Computers and Structures* 81 (2003), S. 1525–1537
- [31] DEMPSEY, J. P.: Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks. In: *Journal of Adhesion Science and Technology* 9 (1995), S. 253–265
- [32] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. In: *Journal of Elasticity* 9 (1979), S. 373–391
- [33] DEMPSEY, J. P. ; SINCLAIR, G. B.: On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge. In: *Journal of Elasticity* 11 (1981), S. 317–327
- [34] DIERINGER, Rolf ; BECKER, Wilfried: Analysis of notches and cracks in circular Kirchhoff plates using the scaled boundary finite element method. In: *PAMM — Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 12 (2012), S. 189–190
- [35] DIERINGER, Rolf ; BECKER, Wilfried: Analysis of cracked and notched composites applying a new formulation of the scaled boundary finite element method. In: *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*, 4.-7.9.2012. – Dubrovnik, Croatia
- [36] DIERINGER, Rolf ; HEBEL, Jochen ; BECKER, Wilfried: A new scaled boundary finite element formulation for the analysis of cracks and notches in laminated plates. In: *Proceedings of the International Conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures*, 18-20 June 2012, S. 182–183. – Politecnico di Torino, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Italy

- [37] DIERINGER, Rolf ; HEBEL, Jochen ; BECKER, Wilfried: Extension of the scaled boundary finite element method to plate bending problems. In: *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 11 (2011), S. 203–204
- [38] DIERINGER, Rolf ; HEBEL, Jochen ; BECKER, Wilfried: The scaled boundary finite element method for plate bending problems. In: *Proceedings of the 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, 9.-12. May 2011, S. 169–170. – Warschau. Hrsg.: A. Borkowski, T. Lewinski, G. Dzierzanowski
- [39] DOHERTY, James P. ; DEEKS, Andrew J.: Scaled boundary finite-element analysis of a non-homogeneous axisymmetric domain subjected to general loading. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 27 (2003), S. 813–835
- [40] DOHERTY, James P. ; DEEKS, Andrew J.: Scaled boundary finite-element analysis of a non-homogeneous elastic half-space. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57 (2003), S. 955–973
- [41] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie I*. Zweite überarbeitete Auflage. Mannheim, Wien, Zürich : B.I.-Wissenschaftsverlag, 1986
- [42] FENNER, D. N.: Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface. In: *International Journal of Fracture* 12 (1976), S. 705–721
- [43] GIRKMANN, Karl: *Flächentragwerke*. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Wien : Springer-Verlag, 1959
- [44] GODFREY, D. E. R.: Generalized plane stress in an elastic wedge under isolated loads. In: *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics* 8 (1955), S. 226–236
- [45] GOSWAMI, Sanjib ; BECKER, Wilfried: Computation of 3-D stress singularities for multiple cracks and crack intersections by the scaled boundary finite element method. In: *International Journal of Fracture* 175 (2012), S. 13–25
- [46] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W. ; WIGGERS, P.: *Technische Mechanik, Band 4, Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Dritte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1999
- [47] GROSS, Dietmar ; SEELIG, Thomas: *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001
- [48] HEIN, V. L. ; ERDOGAN, F.: Stress singularities in a two-material wedge. In: *International Journal of Fracture Mechanics* 7 (1971), S. 317–330

- [49] INOUE, T. ; KOGUCHI, H.: Influence of the intermediate material on the order of stress singularity in three-phase bonded structure. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), S. 399–417
- [50] JOSEPH, P. F. ; ZHANG, N.: Multiple root solutions, wedge paradoxes and singular stress states that are not variable-separable. In: *Composites Science and Technology* 58 (1998), S. 1839–1859
- [51] KIRCHHOFF, Gustav: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51 – 88
- [52] KOTOUSOV, A. ; LEW, Y. T.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates of arbitrary thickness in extension. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 5100–5109
- [53] KUNA, Meinhard: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen - Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, GWV Fachverlage GmbH, 2008
- [54] LABOSSIÈRE, P. ; HUANG, C.-S.: Stress singularities at corners in thin and thick elastic plates. In: *2003 Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, 2003. – Society for Experimental Mechanics
- [55] LEGUILLON, D. ; SANCHEZ-PALENCIA, E.: *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. New York : John Wiley & Sons Inc., 1987
- [56] LI, M. ; SONG, H. ; GUAN, H. ; ZHANG, H.: Schur decomposition in the scaled boundary finite element method in elastostatics. In: *IOP conference series: Materials Science and Engineering* Bd. 10, 2010
- [57] LINDEMANN, J. ; BECKER, W.: The boundary finite element method for stress concentration problems in composite laminates. In: *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 1 (2002), S. 207–208
- [58] LINDEMANN, J. ; BECKER, W.: The boundary finite element method: A new method for stress-concentration problems in composite laminates. In: *Fifth World Congress on Computational Mechanics.*, July 7-12, 2002, S. 1–10. – Vienna, Austria
- [59] MAN, H. ; SONG, C. ; GAO, W. ; TIN-LOI, F.: A unified 3D-based technique for plate bending analysis using scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91 (2012), S. 491–515
- [60] MAN, H. ; SONG, C. ; XIANG, T. ; GAO, W. ; TIN-LOI, F.: Higher-order plate bending analysis based on the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95 (2013), S. 331–360

-
- [61] MATHIAK, Friedrich U.: *Ebene Flächentragwerke II: Grundlagen der Plattentheorie*. 1. Auflage. Brodaer Str. 2, D-17033 Neubrandenburg : Scriptum Hochschule Neubrandenburg, 2008
- [62] MAYLAND, W.: *Untersuchungen zu Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multimaterialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode*. Darmstadt : Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2012
- [63] MAYLAND, W. ; BECKER, W.: Scaled boundary finite element analysis of stress singularities in piezoelectric multi-material systems. In: *PAMM - Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics* 9 (2009), S. 99–102
- [64] MEHRMANN, V. ; WATKINS, D.: Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure. In: *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 13 (2002), S. 106–118
- [65] MELZER, H. ; RANNACHER, R.: Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der Kirchhoffschen Platte. In: *Bauingenieur, Zeitschrift für das gesamte Bauwesen* 55 (1980), S. 181–184
- [66] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Asymptotic analysis of stress singularities in composite laminates by the boundary finite element method. In: *Composite Structures* 71 (2005), S. 210–219
- [67] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Semi-analytical computation of 3D stress singularities in linear elasticity. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 21 (2005), S. 247–257
- [68] MITTELSTEDT, Christian ; BECKER, Wilfried: Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 2868–2903
- [69] MÜLLER, A. ; WENCK, J. ; GOSWAMI, J. ; LINDEMANN, J. ; HOHE, J. ; BECKER, W.: The boundary finite element method for predicting directions of cracks emerging from notches at bimaterial junctions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 373–386
- [70] MUNZ, D. ; YANG, Y. Y.: Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors. In: *International Journal of Fracture* 60 (1993), S. 169–177
- [71] PAGEAU, S. S. ; JOSEPH, P. F. ; BIGGERS, S. B.: Singular antiplane stress fields for bonded and disbonded three-material junctions. In: *Engineering Fracture Mechanics* 52 (1995), S. 821–832

-
- [72] PAPADAKIS, P. J. ; BABUSKA, I.: A numerical procedure for the determination of certain quantities related to the stress intensity factors in two-dimensional elasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 122 (1995), S. 69–92
- [73] QIAN, Z. Q. ; AKISANYA, A. R.: An investigation of the stress singularity near the free edge of scarf joints. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 18 (1999), S. 443–463
- [74] RICE, J. R. ; SIH, G. C.: Plane problems of cracks in dissimilar media. In: *Journal of Applied Mechanics* 32 (1965), S. 418–423
- [75] RÖSSLE, A. ; SÄNDIG, A.-M.: Corner singularities and regularity results for the Reissner/Mindlin plate model. In: *Journal of Elasticity* 103 (2011), S. 113–135
- [76] SATOR, C.: *Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale*. Darmstadt : Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2010
- [77] SCHÜRMANN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2005
- [78] SIH, G. C. ; PARIS, P. C. ; ERDOGAN, F.: Crack-tip, stress intensity factors for plane extension and plate bending problems. In: *Journal of Applied Mechanics* 29 (1962), S. 306–312
- [79] SIH, G. C. ; RICE, J. R.: The bending of plates of dissimilar materials with cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 31 (1964), Nr. 3, S. 477–482
- [80] SINCLAIR, G. B.: Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 66 (1999), S. 556–560
- [81] SINCLAIR, G. B.: Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. In: *Journal of Applied Mechanics* 67 (2000), S. 219–223
- [82] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity - I: Removal, interpretation, and analysis. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 4, S. 251–297
- [83] SINCLAIR, G. B.: Stress singularities in classical elasticity - II: Asymptotic identification. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 5, S. 385–439
- [84] SONG, C.: A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 2325–2356

- [85] SONG, Chongmin: A super-element for crack analysis in the time domain. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 1332–1357
- [86] SONG, Chongmin: Evaluation of power-logarithmic singularities, T-stresses and higher order terms of in-plane singular stress fields at cracks and multi-material corners. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 1498–1530
- [87] SONG, Chongmin: Analysis of singular stress fields at multi-material corners under thermal loading. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), S. 620–652
- [88] SONG, Chongmin ; TIN-LOI, Francis ; GAO, Wei: A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), S. 2316–2336
- [89] SONG, Chongmin ; TIN-LOI, Francis ; GAO, Wei: Transient dynamic analysis of interface cracks in anisotropic bimaterials by the scaled boundary finite-element method. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), S. 978–989
- [90] SONG, Chongmin ; VRCELJ, Zora: Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite-element method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 1960–1980
- [91] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: Consistent infinitesimal finite-element-cell method: out-of-plane motion. In: *Journal of Engineering Mechanics* 121 (1995), S. 613–619
- [92] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: Consistent infinitesimal finite-element-cell method: three-dimensional vector wave equation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 2189–2208
- [93] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: The scaled boundary finite-element method - alias consistent infinitesimal finite-element cell method - for elastodynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 147 (1997), S. 329–355
- [94] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: Body loads in scaled boundary finite-element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180 (1999), S. 117–135
- [95] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: The scaled boundary finite element method: analytical solution in frequency domain. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164 (1999), S. 249–264
- [96] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: The scaled boundary finite-element method - a primer: solution procedures. In: *Computers and Structures* 78 (2000), S. 211–225

-
- [97] SONG, Chongmin ; WOLF, John P.: Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method. In: *Computers and Structures* 80 (2002), S. 183–197
- [98] SUGA, T. ; ELSSNER, G. ; SCHMAUDER, S.: Composite parameters and mechanical compatibility of material joints. In: *Journal of Composite Materials* 22 (1988), S. 917–934
- [99] TIMOSHENKO, S.: *Theory of plates and shells*. First edition. New York and London : McGraw-Hill Book Company, 1940
- [100] TRANTER, J. C.: The use of Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge. In: *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics* 1 (1948), S. 125–130
- [101] TZUCHIANG, W. ; STAHL, P.: A crack perpendicular to and terminating an interface. In: *Acta Mechanica Sinica* 14 (1998), S. 27–36
- [102] VU, Thu H. ; DEEKS, Andrew J.: Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), S. 1714–1733
- [103] WIGGER, H.: *Spannungskonzentrations-Effekte an Verstärkungspflaster-Ecken*. Darmstadt : Fachbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2008
- [104] WILLIAMS, M. L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. In: *Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), S. 526–528
- [105] WILLIAMS, M. L.: Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. In: *Proceedings of the U. S. National Congress of Applied Mechanics*, 1952, S. 325–329
- [106] WILLIAMS, M. L.: On the stress distribution at the base of a stationary crack. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 109–114
- [107] WILLIAMS, M. L.: The bending stress distribution at the base of a stationary crack. In: *Journal of Applied Mechanics* 28 (1961), S. 78–83
- [108] WOLF, John P. ; SONG, Chongmin: Dynamic-stiffness matrix of unbounded soil by finite-element cloning. In: *Earthquake Engineering, Tenth World Conference*. Rotterdam, 1992, S. 1645–1650
- [109] WOLF, John P. ; SONG, Chongmin: Consistent infinitesimal finite-element cell method: in-plane motion. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 123 (1995), S. 355–370

- [110] WOLF, John P. ; SONG, Chongmin: *Finite-element modelling of unbounded media*. First edition. Chichester, West Sussex, England : John Wiley & Sons Ltd., 1996
- [111] WOLF, John P. ; SONG, Chongmin: The scaled boundary finite-element method - a primer: derivations. In: *Computers and Structures* 78 (2000), S. 191–210
- [112] WOLF, John P. ; SONG, Chongmin: The scaled boundary finite-element method - A fundamental solution-less boundary element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 5551–5568
- [113] YANG, Y. Y. ; MUNZ, D.: Determination of the regular stress term in a dissimilar materials joint under thermal loading by the Mellin Transform. In: *Journal of Thermal Stresses* 17 (1994), S. 321–336
- [114] YANG, Y. Y. ; MUNZ, D.: Stress distribution in a dissimilar materials joint for complex singular eigenvalues under thermal loading. In: *Journal of Thermal Stresses* 18 (1995), S. 407–419
- [115] YANG, Z.: Application of scaled boundary finite element method in static and dynamic fracture problems. In: *Acta Mechanica Sinica* 22 (2006), S. 243–256
- [116] YANG, Z. J. ; DEEKS, A. J.: Modelling cohesive crack growth using a two-step finite element-scaled boundary finite element coupled method. In: *International Journal of Fracture* 143 (2007), S. 333–354
- [117] YANG, Zhenjun ; DEEKS, A. J.: Fully-automatic modelling of cohesive crack growth using a finite element-scaled boundary finite element coupled method. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 2547–2573
- [118] ZAK, A. R. ; WILLIAMS, M. L.: Crack point stress singularities at a bi-material interface. In: *Journal of Applied Mechanics* 30 (1963), S. 142–143
- [119] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method: for solid and structural mechanics*. Sixth edition. Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- [120] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method: its basis and fundamentals*. Sixth edition. Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- [121] ZURMÜHL, Rudolf: *Matrizen*. Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer-Verlag, 1950

Bisher sind in dieser Reihe erschienen

Band 1

Zur mikrorissinduzierten Schädigung spröder Materialien

B. Lauterbach, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-01-4

Band 2

3D-Simulation der Mikrostrukturentwicklung in Zwei-Phasen-Materialien

R. Müller, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-02-2

Band 3

Zur numerischen Simulation von Morphologieänderungen in mikro-heterogenen Materialien

S. Kolling, Dissertation 2001, ISBN 3-935868-03-0

Band 4

Theoretische und numerische Untersuchung von Versagensmechanismen in Metall-Keramik-Verbundwerkstoffen

T. Emmel, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-04-9

Band 5

On microcrack dominated problems in dynamics and statics of brittle fracture: a numerical study by boundary element techniques

S. Rafiee, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-05-7

Band 6

Kontinuumsmechanik anisotroper Festkörper und Fluide

H. Ehrentraut, Habilitationsschrift 2002, ISBN 3-935868-06-5

Band 7

Plane unsteady inviscid incompressible hydrodynamics of a thin elastic profile

N. Blinkova, Dissertation 2002, ISBN 3-935868-07-3

Band 8

Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten

H. Baaser, Habilitationsschrift 2004, ISBN 3-935868-08-1

Band 9

Orts- und zeitadaptive DAE-Methoden zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens innerhalb der FEM

S. Eckert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-09-X

Band 10

Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: Parameter Sensitivity Tests and Temperature-Dependent Rate Factor

A. Humbert, Dissertation 2005, ISBN 3-935868-10-3

Band 11

A Thermo-mechanical Continuum Theory with Internal Length of Cohesionless Granular Materials

Chung Fang, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-11-1

Band 12

Modeling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions: Numerical Simulation and Laboratory Analyses

Chiou Min-Ching, Dissertation 2006, ISBN 3-935868-12-X

Band 13

Configurational forces in defect mechanics and in computational methods

R. Müller, Habilitationsschrift 2005, ISBN 3-935868-13-8

Band 14

Hyperelastic dynamics in physical and material space

S. Kolling, Habilitationsschrift 2007, ISBN 978-3-935868-14-3

Band 15

Phenomenological modeling of ferroelectric material behavior

V. Mehling, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-15-0

Band 16

Ein mischungsbasiertes Materialmodell zum Knochenumbau

R.-R. Kühn, Dissertation 2006, ISBN 978-3-935868-16-7

Band 17

Einige Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode und deren Anwendung auf Randeﬀekte in ebenen Laminaten

J. Artel, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-17-4

Band 18

Spannungskonzentrations-Eﬀekte an Verstärkungspﬂaster-Ecken

H. Wigger, Dissertation 2008, ISBN 978-3-935868-18-1

Band 19

Rotationseﬀekte in der Kristallplastizität

C. Bröse, Dissertation 2007, ISBN 978-3-935868-19-8

Band 20

Finite-Element-Modelle zur Simulation von Delaminationen dünner Filme auf Substraten

V. D. Pham, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-20-4

Band 21

Asymptotische Nahfeldanalysen ebener Multi-Materialverbindungsstellen mit der Methode komplexer Potentiale

C. Sator, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-21-1

Band 22

Modellierung spröder Rissbildung an Spannungskonzentrationen mit der Bruchmechanik finiter Risse

J. Hebel, Dissertation 2010, ISBN 978-3-935868-22-8

Band 23

Some Contributions to the Homogenization of Macroscopically Isotropic Composites

V. Salit, Dissertation 2011, ISBN 978-3-935868-23-5

Band 24

Asymptotic Analysis of the Load Transfer on Double-Lap Bolted Joints

J. Kratochvíl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-24-2

Band 25

Spannungssingularitätsordnungen in linear-elastischen und piezoelektrischen Multi-materialkonfigurationen mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

W. Mayland, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-25-9

Band 26

Plastizität und Skaleneffekte sowie Deformations- und Versagensmodellierung dünner metallischer Schichten bei Nanoindentation

A. Trondl, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-26-6

Band 27

Theoretical modeling and parallel programming of a nonlinear composite finite shell element based on a mixed global-local variational principle

M. Schürg, Dissertation 2012, ISBN 978-3-935868-27-3

Band 28

Strukturmechanische Modellierung und Analyse des Tragverhaltens von dünnwandigen hochbelasteten Composite-Biege- und Querkraftträgern

A. M. Kroker, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-28-0

Band 30

Der Laminatrandeffekt und seine Analyse, insbesondere mit der Rand-Finite-Elemente-Methode

J. Lindemann, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-30-3

Band 31

Avoidance of brake squeal by a separation of the brake disc's eigenfrequencies: A structural optimization problem

A. Wagner, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-31-0

Band 32

Ultrasonic Generators for Energy Harvesting Applications: Self-Excitation and Mechanical Frequency Transformation

E. Heffel, Dissertation 2013, ISBN 978-3-935868-32-7

Band 33

Neue Ansätze zur Analyse der Lastübertragung und Initiierung finiter Risse in Klebverbindungen

P. Weißgraeber, Dissertation 2014, ISBN 978-3-935868-33-4

Band 34

Instabilities and Wear Propagation in Calenders: Interactions with Structural Dynamics and Contact Kinematics

M. Eckstein, Dissertation 2014, ISBN 978-3-935868-34-1

Band 35

Adaptive Camber Airfoil for Load Alleviation in Horizontal Axis Wind Turbines: Analytical and Numerical Study

H. Spiegelberg, Dissertation 2014, ISBN 978-3-935868-35-8

In dieser Arbeit werden Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode zur Analyse von Platten und Laminaten vorgestellt. Mit der Rand-Finite-Elemente-Methode lassen sich nicht nur komplexe Randwertprobleme lösen, sondern auch Singularitätsordnungen an geometrischen und materiellen Diskontinuitäten ohne zusätzlichen numerischen Aufwand effizient und genau ermitteln. Dies stellt einen entscheidenden Vorteil der Methode gegenüber anderen Berechnungsverfahren dar. Im ersten Teil der Arbeit werden die theoretischen Grundlagen vermittelt. Danach werden die neuen Elemente für Platten und Lamine formuliert und mit Beispielen überprüft. Die Erweiterungen der Rand-Finite-Elemente-Methode konvergieren sehr gut. Abschließend werden Singularitäten an Rissen und Kerben ermittelt. Neben isotropen und anisotropen Materialien werden unterschiedliche Randbedingungen auf den Kerbflanken untersucht und ihre Einflüsse auf die Stärke der Singularitäten diskutiert. Bei Laminaten wird untersucht, wie Kopplungen zwischen Scheiben- und Plattenverhalten die Singularitäten beeinflussen. Bei vielen Konfigurationen werden Supersingularitäten gefunden, die stärker als die klassische $\frac{1}{\sqrt{r}}$ -Rissspitzensingularität sind.